6. Proseminar Analysis I

29.4.2010

1. Sei A eine $n \times n$-Matrix über $\mathbb{R}$, $0 < \lambda < 1$, so dass $\|Ax\| \leq \lambda \|x\|$ für $x \in \mathbb{R}^n$. Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $x_{n+1} = Ax_n$ für $n \geq 0$. Zeigen Sie:
   (a) Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|$ konvergiert.
   (b) Es gibt ein $y \in \mathbb{R}^n$ mit $y = \sum_{n=0}^{\infty} x_n$.
   (c) Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} Ax_n$ konvergiert gegen Ay. Folgern Sie daraus, dass $y = (E - A)^{-1} x_0$, wobei E die $n \times n$-Einheitsmatrix ist.

2. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie: Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergiert genau dann absolut, wenn für jede Teilfolge $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\varphi(n)}$ konvergiert.

   Hinweis: Untersuchen Sie insbesondere die Teilfolgen der positiven bzw. negativen Glieder von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

3. Konvergieren oder divergieren die folgenden reellen Reihen?

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n+3}}{n^2+4n}$, b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$, c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$, d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2} 2^n}$,
   e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $x_0 = 1$, $x_n = x_{n-1}/2 + 2$, $n \geq 1$.

   Hinweis: Sie müssen im Fall von Konvergenz die Grenzwerte nicht berechnen.

4. Sei $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$. Zeigen Sie für eine monotone Nullfolge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ ist genau dann konvergent, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} x_{kn}$ konvergiert.

5. Zeigen Sie, dass die Reihe
   $$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\sqrt{\lfloor \frac{\nu+1}{2} \rfloor}}$$
   konvergiert, und bestimmen Sie ihren Wert. Beweisen Sie dann, dass die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ mit
   $$a_\nu = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2(\frac{\nu-1}{3}+1)-1}} & \text{falls } \nu \equiv 1 \bmod 3 \\ \frac{1}{\sqrt{2(\frac{\nu-2}{3}+1)}} & \text{falls } \nu \equiv 2 \bmod 3 \\ \frac{-1}{\sqrt{\frac{\nu}{3}}} & \text{falls } \nu \equiv 0 \bmod 3 \end{cases}$$
   eine Umordnung dieser Reihe ist, und untersuchen Sie das Konvergenzverhalten dieser Reihe.

   Hinweis: Für $x \in \mathbb{R}$ ist $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl kleiner gleich x. Bestimmen Sie die Folge der Partialsummen der Form $(\sum_{\nu=1}^{3n} a_\nu)_{n \in \mathbb{N}}$.