8. Proseminar Analysis I

10.6.2010

1. Zeigen Sie auf 2 verschiedene Arten, dass die Funktion

$$f : \begin{cases} [0,1] & \to \mathbb{R}, \\ x & \mapsto \frac{x^2}{x+2} \end{cases}$$

gleichmäßig stetig auf $[0,1]$ ist:

- Methode 1: Finden Sie zu einem beliebig kleinen $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, sodass gilt:

$$\big(\forall x, y \in [0,1]\big)\ |x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon.$$

- Methode 2: Verwenden Sie einen Lehrsatz der Analysis.

2. Sei $A \subset \mathbb{R}$, und seien $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}$ zwei offenen Mengen, sodass $A \subset U_1 \cup U_2$ und $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Außerdem sei $A \cap U_i \neq \emptyset$ für $i = 1, 2$. Wir definieren eine Abbildung $g : A \to \{1, 2\}$ mittels

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in U_1, \\ 2 & \text{falls } x \in U_2. \end{cases}$$

Zeigen Sie:

a) Die Abbildung g ist stetig auf A.

b) A ist kein Intervall.

Tipp für (a): Sei $x \in A$. Überlegen Sie, dass g in einer ausreichend kleinen Umgebung von x konstant ist. Tipp für (b): Zwischenwertsatz!

3. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, und seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen mit $f(x_n) = 1$ und $f(y_n) = -1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sind die folgenden Aussagen immer richtig? (Beweis oder Gegenbeispiel)

a) Wenn $\lim_{n\to\infty} |x_n - y_n| = 0$ gilt, dann ist f nicht stetig.

b) Wenn $\lim_{n\to\infty} |x_n - y_n| = 0$ gilt, dann ist f nicht gleichmäßig stetig.

c) Wenn die (endlichen) Grenzwerte $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ und $y = \lim_{n\to\infty} y_n$ existieren und $x = y$ gilt, dann ist f nicht stetig.