Proseminar Analysis I, SS 11

BLATT 1

1. (a) Zeigen Sie, daß für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $-1 < \frac{x}{1+|x|} < 1$.

(b) Zeigen Sie, daß die Abbildung $\psi \colon \mathbb{R} \to (-1,1)$, definiert durch $\psi(x) := \frac{x}{1+|x|}$, bijektiv ist, und bestimmen Sie die Umkehrfunktion ψ^{-1}.

2. Zeigen Sie:

(a) Es seien a, b reelle Zahlen mit $a < b$. Dann ist $a < \frac{a+b}{2} < b$.

(b) Gilt für $a, b \in \mathbb{R}$, daß $a < b + \varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$, so ist $a \leq b$.

3. Zeigen Sie, daß für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

(a) $x \leq |x|$, $|-x| = |x|$, $|x| \geq 0$.

(b) Es sei zusätzlich $b \geq 0$. Dann sind die Aussagen $|x| \leq b$ und $-b \leq x \leq b$ gleichwertig.

4. Mit $\mathbb{N}$ bezeichnen wir die Menge der natürlichen Zahlen ohne 0, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Man beweise mittels vollständiger Induktion:

(a) Für jede reelle Zahl $q \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ und für jedes $N \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{j=0}^{N} q^j = \frac{q^{N+1} - 1}{q - 1}.$$

(b) Für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{1}{m+1} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2m-1}{2m} \leq \frac{1}{\sqrt{3m+1}}.$$

(c) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

5. Vermuten Sie, welchen Wert die Summe $\sum_{k=0}^{m}(2k+1)$ für beliebiges $m \in \mathbb{N}$ hat, und beweisen Sie Ihre Vermutung mit vollständiger Induktion.