

Proseminar Analysis I, SS 11

BLATT 10

1. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$\sin|_{[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]}: [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$$

bijektiv ist und bestimmen Sie ihre Umkehrfunktion.

2. Zeigen Sie, dass die Funktionen $\mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

- (a) $x \mapsto x^{(x^x)}$,
- (b) $x \mapsto (x^x)^x$,
- (c) $x \mapsto x^{(x^{\frac{1}{x}})}$

differenzierbar sind und bestimmen Sie ihre Ableitungen.

3. Bestimmen Sie die Ableitung von arccot .

4. Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare und gerade (bzw. ungerade) Funktion. Zeigen Sie, dass f' ungerade (bzw. gerade) ist.

5. Es seien $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$. Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} |x|^a \cdot \sin \frac{1}{|x|^b}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Man zeige, daß f in allen von 0 verschiedenen Stellen differenzierbar ist und berechne die Ableitung. Für welche a, b ist f auch an der Stelle 0 differenzierbar? Wann ist in diesem Fall die Ableitungsfunktion $f': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (a) stetig, (b) nicht stetig, aber beschränkt, (c) unbeschränkt?

6. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} .$$

Ist f an der Stelle 0 links- rechtsseitig differenzierbar?