Proseminar Analysis I, SS 11

Blatt 12

1. Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in (a,b)$.

(a) f sei im Punkt x_0 differenzierbar. Bestimmen Sie die symmetrische Ableitung

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}. \qquad (*)$$

(b) Nun existiere der Grenzwert $(*)$. Beweisen oder widerlegen Sie, dass f in x_0 differenzierbar ist.

2. Gegeben ist die Funktion $f\colon [0,3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$.

(a) Wo ist f monoton fallend, wo monoton steigend?

(b) Bestimmen Sie die lokalen und globalen Extrema von f.

3. Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

(a) Es sei f auf (a,b) differenzierbar und es existiere $\lim_{x\to a} f'(x)$. Zeigen Sie, dass f in $[a,b)$ differnzierbar ist und dass f' in a stetig ist.

(b) Nun sei f auf $[a,b]$ differnzierbar und $x_0 \in (a,b)$, sodass f' nicht stetig in x_0 ist. Zeigen Sie, dass x_0 keine Sprungstelle von f' ist und dass f' in x_0 eine Unstetigkeit 2. Art besitzt.

4. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} e^{-1/x^2} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

in $x = 0$ beliebig oft differenzierbar ist. Hinweis: Zeigen Sie, dass für $x > 0$ die Ableitung $f^{(n)}(x) = P_{3n}(1/x)e^{-1/x^2}$ ist, wobei $P_{3n}(y)$ ein Polynom vom Grad $3n$ ist ($n \in \mathbb{N}$). Diese Funktionen sind stetig an die Stelle $x = 0$ fortsetzbar. Bestimmen Sie diesen Wert, der dann $f^{(n)}(0)$ entspricht.

5. Bestimmen Sie von folgenden Potenzreihen den Konvergenzradius und berechnen Sie diese auf ihrem Konvergenzinterval:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 x^n \quad .$$