Proseminar Analysis I, SS 11

Blatt 2

1. Es seien x, y relle von 0 verschiedene Zahlen und es seien m, $n \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie:

(a) $x^n y^n = (xy)^n$.

(b) $(x^m)^n = x^{mn}$.

(c) Sind x und y positiv und $n \geq 1$, so gilt $x < y \iff x^n < y^n$.

2. Es seien m, $n \in \mathbb{N}_0$ mit $m \leq n$. Zeigen Sie:

(a) $\binom{n}{m} \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.

(b) $\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$.

3. Es seien A, B nicht leere nach oben beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}^+$. Zeigen Sie, dass $AB = \{ab \mid a \in A,\, b \in B\}$ nach oben beschränkt ist und dass $\sup(AB) = \sup(A)\sup(B)$ gilt.

4. Bestimmen Sie für folgende Mengen (falls möglich) das Supremum, das Infimum, das Maximum und das Minimum:

$$A = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\},\ B = (1, \sqrt{2}],\ C = B \cap \mathbb{Q},\ D = \mathbb{N},\ E = \left\{\frac{2n+1}{3n-1} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\} \quad .$$

5. Zeigen Sie, dass zu jeder reellen Zahl x eine natürliche Zahl n existiert, so dass $x \leq 2^n$ gilt.