Proseminar Analysis I, SS 11

Blatt 3

1. Seien A und B nichtleere und beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) Für alle $a \in A$ und alle $b \in B$ ist $a \leq b$.

(b) $\sup(A) \leq \inf(B)$.

2. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $I_n := (0, \frac{1}{n})$, $J_n := [0, 1 + \frac{1}{n}]$, $K_n := \{x \in \mathbb{R} \mid x > n\}$.

(a) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Beziehungen $I_{n+1} \subseteq I_n$, $J_{n+1} \subseteq J_n$, $K_{n+1} \subseteq K_n$ gelten.

(b) Bestimmen Sie $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} J_n$ und $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$.

3. Es sei $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ und $\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Die Abbildung $\Phi : \mathbb{C} \setminus \{-i\} \to \mathbb{C}$ sei gegeben durch $\Phi(z) := \frac{z-i}{z+i}$. Zeigen Sie, daß $\varphi := \Phi\big|_{\mathbb{H}}$ eine Bijektion zwischen $\mathbb{H}$ und $\mathbb{E}$ darstellt. Bestimmen Sie außerdem eine explizite Formel für φ^{-1}.

4. Seien a, $b \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$x^2 + ax + b = 0$$

eine Lösung in $\mathbb{C}$ besitzt.

5. Zeichnen Sie folgende Teilmengen von $\mathbb{C}$:

(a) $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z+1) = |z-1|\}$.

(b) $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z^2) > \alpha\}$ (dabei sei $\alpha \in \mathbb{R}$).

(c) $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(iz) < |z|^2\}$.

6.

(a) Zeichnen Sie die Einheitskugel im $\mathbb{R}^2$ bezüglich der Norm

$$\|(x_1, x_2)\| = \frac{1}{2}|x_1| + 3|x_2| \quad .$$

(b) Für $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ und strikt positive reelle Zahlen $g_1, \ldots g_n$ ist die gewichtete 1-Norm in $\mathbb{C}^n$ definiert durch

$$\|z\|_{1,g} = \sum_{i=1}^{n} g_i |z_i| \quad .$$

Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_{1,g}$ äquivalent ist zur euklidischen Norm $\|\cdot\|_2$ definiert durch

$$\|z\|_2 = \Big(\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \quad .$$