Proseminar Analysis I, SS 11

Blatt 4

1.

(a) Es seien $(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1}$, $(z_n)_{n\geq 1}$ reelle Folgen mit $x_n \leq y_n \leq z_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Konvergierern $(x_n)_{n\geq 1}$ und $(z_n)_{n\geq 1}$ gegen $a \in \mathbb{R}$ so gilt auch $\lim_{n\to\infty} y_n = a$.

(b) Es seien a, $b \in \mathbb{R}_{>0}$. Zeigen Sie, dass die Folge $(\sqrt[n]{an+b})_{n\geq 1}$ konvergiert und berechnen Sie ihren Grenzwert.

2. Durch $x_0 > 1$ und $x_n = (2x_{n-1} - 1)/x_{n-1}$ sei eine Folge in $\mathbb{R}$ gegeben. Zeigen Sie:

(a) $x_n > 1$ für alle $n \geq 0$.

(b) $x_{n+1} \leq x_n$ für alle $n \geq 0$.

(c) Die Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ ist konvergent.

Berechnen Sie $\lim_{n\to\infty} x_n$.

3. Untersuchen Sie untenstehende Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenfalls den Grenzwert:

$$\left(\frac{n^3+5n-7}{n^5+6n^4+5n^2+9n+1}\right)_{n\geq 1}, \quad \left(\frac{12n^4-11n^3+17n^2+n-1}{3n^4+5n^2+9}\right), \quad \left(\frac{5n^3+8n+1}{n+2}\right) \quad .$$

4. Sei $(x_n)_{n\geq 1}$ eine Cauchy-Folge in einem normierten Raum X. Zeigen Sie, dass $(x_n)_{n\geq 1}$ genau dann konvergiert, wenn $(x_n)_{n\geq 1}$ eine konvergente Teilfolge besitzt.

5. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Zahlenfolge. Die Teilfolgen $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(x_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren. Was kann man über das Konvergenzverhalten von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sagen? Beweisen Sie Ihre Antwort.