Proseminar Analysis I, SS 11

Blatt 7

1. Überprüfen Sie, ob die folgenden Funktionen Grenzwerte bei $x = 0$ besitzen, und ob sie an der Stelle $x = 0$ stetig sind.

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{falls } x > 0 \\ 1 - x & \text{falls } x < 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|}\mathrm{e}^{-1/|x|} & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0, \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Hinweis: $\lim_{z\to\infty} z\mathrm{e}^{-z} = 0$.

2. Seien X, Y und Z normierte Räume, $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ Funktionen. Seien $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ und $z_0 \in Z$. Beweisen Sie oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Falls $y_0 = \lim_{x\to x_0} f(x)$ und $z_0 = \lim_{y\to y_0} g(y)$, dann ist $z_0 = \lim_{x\to x_0}(g\circ f)(x)$.

(b) Falls $y_0 = \lim_{x\to x_0} f(x)$ und $z_0 = \lim_{y\to y_0} g(y)$ und $y_0 \notin f(X)$, dann ist $z_0 = \lim_{x\to x_0}(g\circ f)(x)$.

(c) Falls $y_0 = \lim_{x\to x_0} f(x)$ und $z_0 = \lim_{x\to x_0}(g\circ f)(x)$, dann ist $z_0 = \lim_{y\to y_0} g(y)$.

3. Es sei $f\colon D \to Y$, $D \subset \mathbb{R}$ nicht leer, und $x_0 \in \bar{D}$. Beweisen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:
i) Es existiert $\lim_{x\to x_0} f(x)$.
ii) Es existieren der rechts- und der linksseitige Grenzwert in x_0 und beide sind gleich.

4. (a) Bestimmen Sie (mit Begründung) alle $a \in \mathbb{R}$, so dass die Funktion

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad g(x) := \begin{cases} x^3 + 2ax^2 + a^2, & \text{wenn } x \leq 1 \\ ax^2 + \frac{4a^2}{1+x^2}, & \text{wenn } x > 1 \end{cases},$$

überall stetig ist.

(b) Bestimmen Sie (mit Begründung) alle $x_0 \in \mathbb{R}$, in denen die Funktion

$$\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \gamma(x) := \{x\} := x - [x],$$

stetig ist.

(c) Beweisen Sie, dass die Funktion

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto \sqrt{\gamma(x)} - \gamma(x) \in \mathbb{R}$$

auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist.

5. Untersuchen Sie, ob die Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) := \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2},$$

stetig in $0 = (0,0)$ fortgesetzt werden kann.

6. Beweisen Sie mit Hilfe eines ε,δ-Beweises, dass die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) := \frac{x+y}{1+x^2},$$

überall stetig ist.