Proseminar Analysis I, SS 11

Blatt 9

1. Seien X, Y normierte Vektorräume, $D \subset X$, $x_0 \in D$, $f \colon D \to Y$ eine Abbildung und U eine Umgebung von x_0. Zeigen Sie, dass f genau dann in x_0 stetig ist, wenn $f_{|U \cap D} \colon U \cap D \to Y$ in x_0 stetig ist.

2. Untersuchen Sie, ob folgende Funktionen gleichmäßig stetig sind:

(a) $f \colon (0,1) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin(1/x)$.

(b) $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1/(1+x^2)$.

3. Seien X ein normierter Raum und $A \subset X$. Zeigen Sie:

(a) A ist genau dann abgeschlossen, wenn der Grenzwert einer in X konvergenten Folge in A auch in A enthalten ist.

(b) A ist genau dann kompakt, wenn jede Folge in A eine konvergente Teilfolge besitzt, deren Grenzwert in A enthalten ist.

4. Zeigen Sie, dass die Folge aus Beispiel III-4.4 keine Cauchyfolge ist.

5. Die Funktion $f \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$) sei stetig. Es möge $f(a)f(b) < 0$ sein. Ferner sei $x_1 := a, y_1 := b$ und

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) := \begin{cases} (x_n, \frac{x_n+y_n}{2}), & \text{wenn } f\left(\frac{x_n+y_n}{2}\right) f(a) \leq 0 \\ (\frac{x_n+y_n}{2}, y_n), & \text{wenn } f\left(\frac{x_n+y_n}{2}\right) f(a) > 0 \end{cases}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, daß die Intervalle $[x_n, y_n]$ eine Intervallschachtelung bilden und daß für $\xi \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [x_n, y_n]$ gilt: $f(\xi) = 0$.

6. Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Interval und $f \colon I \to I$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie mit Hilfe des Zwischenwertsatzes, dass f einen Fixpunkt besitzt (d.h., dass es ein $x \in I$ mit $f(x) = x$ gibt).