5. Proseminar zur Einführung in die komplexe Analysis

15.11.2010

1. Für $R \in \mathbb{R}_{>0}$ sei γ die Summe der zwei Wege $\gamma_1\colon [-1,1] \to \mathbb{C}$, $\gamma_1(t) = Rt$, $\gamma_2\colon [0,1] \to \mathbb{C}$, $\gamma_2(t) = R(\cos t\pi + \mathrm{i}\sin t\pi)$. Zeigen Sie für die Funktion $f(z) := 1/(1+z^2)$, dass
$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz = \pi,$$
$$\lim_{R\to\infty} \left| \int_{\gamma_2} f(z)dz \right| = 0,$$
und folgern Sie daraus
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{1}{1+x^2}dx = \pi.$$

2. Bestimmen Sie die Art der Singularitäten und bei Polstellen zusätzlich deren Ordnung:
$$\frac{\exp z}{z^{17}}, \qquad \frac{(\exp(z)-1)^2}{z^2}, \qquad \frac{z}{\exp(z)-1}, \qquad \frac{\cos(z)-1}{z^2},$$
$$\frac{\cos z}{z^2}, \qquad \frac{z^7+1}{z^7}, \qquad \frac{\exp(z)-1}{z^4}, \qquad \frac{(z-1)^2(z+3)}{1-\sin(\pi z/2)}.$$

3. Zeigen Sie, dass eine nicht hebbare Singularität c von der in $D \setminus \{c\}$ holomorphen Funktion f stets eine wesentliche Singularität von $\exp \circ f$ ist.

4. Sei f holomorph in $D \setminus \{c\}$ und sei p ein nichtkonstantes komplexes Polynom. Zeigen Sie: c ist genau dann eine hebbare Singularität (ein Pol, eine wesentliche Singularität) von f, wenn c eine hebbare Singularität (ein Pol, eine wesentliche Singularität) von $p \circ f$ ist.