2. Übungsblatt zur Einführung in die komplexe Analysis

zu lösen bis 27.10.2011

16. Zeigen Sie, dass $X := \{\mathrm{i}y \mid y \in \mathbb{R},\ |y| \leq 1\} \cup \{x + \mathrm{i}y \mid 0 < x \leq 1,\ y = \sin(1/x)\}$ zusammenhängend aber nicht wegzusammenhängend ist.

17. Welche Eigenschaften muss eine Algebra erfüllen?

18. Untersuchen Sie, wo die folgenden Abbildungen von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$ stetig bzw. komplex differenzierbar sind.

    (a) $z \mapsto |z|$,

    (b) $z \mapsto \mathrm{Re}(z)$,

    (c) $z \mapsto z\,\mathrm{Im}(z)$.

19. Wo ist $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar?

    (a) $f(x + \mathrm{i}y) = xy + \mathrm{i}xy,\ x, y \in \mathbb{R}$.

    (b) $f(x + \mathrm{i}y) = -6(\cos x + \mathrm{i}\sin x) + (2 - 2\mathrm{i})y^3 + 15(y^2 + 2y),\ x, y \in \mathbb{R}$.

20. Es sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $f(x+\mathrm{i}y) := \sqrt{|xy|},\ x, y \in \mathbb{R}$. Weiters sei $u(x, y) := \mathrm{Re}\, f(x + \mathrm{i}y)$ und $v(x, y) := \mathrm{Im}\, f(x + \mathrm{i}y),\ x, y \in \mathbb{R}$.

    (a) Zeigen Sie, dass u und v im Nullpunkt partiell differenzierbar sind, und dass im Nullpunkt die Cauchy–Riemannschen Gleichungen gelten.

    (b) Ist f im Nullpunkt reell differenzierbar?

    (c) Ist f im Nullpunkt komplex differenzierbar?

    (d) Sind u und v im Nullpunkt reell differenzierbar?

21. Bestimmen Sie zu $u\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ jeweils alle Funktionen $v\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, so dass $u + \mathrm{i}v$ in $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar ist.

    (a) $u(x, y) = 2x^3 - 6xy^2 + x^2 - y^2 - y$

    (b) $u(x, y) = x^2 - y^2 + e^{-y}\sin x - e^{y}\cos x$

22. Sei G ein Gebiet und sei $f = u + \mathrm{i}v\colon G \to \mathbb{C}$ eine in G komplex differenzierbare Funktion mit $u,\ v\colon G \to \mathbb{R}$. Weiters sei $\hat{v}\colon G \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion. Zeigen Sie, dass $u + \mathrm{i}\hat{v}$ dann und nur dann in G komplex differenzierbar ist, wenn $v - \hat{v}$ in G konstant ist.

23. Beweisen Sie: Für $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ ist die Abbildung $u\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{R},\ z \mapsto \log|z^n|$, harmonisch, aber nicht Realteil einer komplex differenzierbaren Funktion.

    Hinweis: Verwenden Sie: $\arctan'(x) = 1/(1 + x^2)$ für $x \in \mathbb{R}$.

24. Sei D ein Bereich und $f \in \mathcal{O}(D)$. Beweisen oder widerlegen Sie: Die Menge $\{z \in D \mid f(z) = \bar{z}\}$ besitzt keine Häufungspunkte.

25. Sei D ein Bereich mit $\overline{D} = D$, wobei $\overline{D} := \{\bar{z} \mid z \in D\}$, und sei $f \in \mathcal{O}(D)$. Zeigen Sie, dass $g\colon D \to \mathbb{C}$, $g(z) := \overline{f(\bar{z})}$, $z \in D$, ebenfalls in $\mathcal{O}(D)$ liegt.

Formulieren Sie Prüfungsfragen zum Stoff der Vorlesung. Bearbeiten und diskutieren Sie diese auch in kleinen Arbeitsgruppen. Senden Sie die Fragen im Laufe des Semesters an `fripert@uni-graz.at` . Jede(r) Studierende sollte mindestens eine Frage an mich senden. Ihre Fragen werden von mir in einer Fragensammlung herausgegeben und teilweise auch bei der Prüfung Verwendung finden.