6. Übungsblatt zur Einführung in die komplexe Analysis

zu lösen bis 19.1.2012

51. Bestimmen Sie die maximale analytische Fortsetzung von $f\colon B_1(0) \to \mathbb{C}$, $f(z) = \sum_{n\geq 0}(-1)^n z^{2n}$.

52. Zeigen Sie, dass die Reihen

$$\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{2^{n+1}} \qquad \text{und} \qquad \sum_{n\geq 0} \frac{(z-\mathrm{i})^n}{(2-\mathrm{i})^{n+1}}$$

analytische Fortsetzungen voneinander sind.

53. Für die ganze Funktion f existiere $M \in \mathbb{R}$, so dass für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $\operatorname{Re} f(z) \leq M$. Beweisen Sie, dass f konstant ist.

    Hinweis: Untersuchen Sie $\exp \circ f$.

54. Beweisen Sie: Sei f eine ganze transzendente Funktion (also kein Polynom), dann gibt es zu jedem $w_0 \in \mathbb{C}$ eine Folge $(z_n)_{n\geq 0}$ in $\mathbb{C}$ mit $\lim_{n\to\infty} |z_n| = \infty$ und $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = w_0$. (D.h., für jedes $R > 0$ liegt das Bild $f(\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\})$ dicht in $\mathbb{C}$.)

    Hinweis: Indirekter Beweis: Es gebe $w_0 \in \mathbb{C}$, $R, \varepsilon > 0$ so dass für alle z mit $|z| > R \geq 1$ gilt $|f(z) - w_0| \geq \varepsilon$.

    In der abgeschlossenen Kreisscheibe um 0 vom Radius R gibt es nur endlich viele Stellen $b_1, \ldots, b_r$ so dass $f(b_j) = w_0$. Diese w_0-Stellen treten mit der Vielfachheit $n_1, \ldots, n_r$ auf.

    Durch

$$g(z) := \frac{f(z) - w_0}{\prod_{j=1}^{r}(z - b_j)^{n_j}}$$

    wird eine ganze Funktion ohne Nullstellen definiert. Untersuchen Sie $1/g$.

55. In welchen Fällen gibt es eine im Nullpunkt holomorphe Funktion mit $f(1/n) = a_n$, $n \geq 1$, wobei
    a) $(a_1, a_2, a_3, \ldots) = (0, 1/2, 0, 1/2, 0, 1/2, \ldots)$.
    b) $(a_1, a_2, a_3, \ldots) = (1/2, 1/2, 1/4, 1/4, 1/6, 1/6, \ldots)$.
    c) $(a_1, a_2, a_3, \ldots) = (1/2, 2/3, 3/4, 4/5, 5/6, 6/7, \ldots)$.

56. Bestimmen Sie alle ganzen Funktionen f mit Periode 1 und

$$\lim_{y\to\pm\infty} f(x + \mathrm{i}y) = 0, \qquad x, y \in \mathbb{R},$$

    gleichmäßig für $0 \leq x \leq 1$ gilt.

57. Sei G ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{C}$. Sei f holomorph und nicht konstant auf G. Weiters sei f stetig auf $\bar{G}$. Zeigen Sie, dass der Rand des Bildgebietes $f(G)$ im Bild des Randes von G enthalten ist.

58. Sei U eine offene, zusammenhängende Umgebung von $\bar{\mathbb{E}}$. Die Funktion f sei holomorph in U, und es existiere eine Konstante $k \geq 0$ so dass $|f(z)| = k$ für alle $z \in \partial\mathbb{E}$. Zeigen Sie, dass f konstant ist oder eine Nullstelle im Inneren von $\bar{\mathbb{E}}$ besitzt.

    Hinweis: Unterscheiden Sie die Fälle $k = 0$ und $k > 0$. Verwenden Sie Maximums-, Minimumsprinzip und Offenheitssatz.

59. Sei $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Zeigen Sie, dass es keine auf $\bar{\mathbb{E}}$ stetige und auf $\mathbb{E}$ holomorphe Funktion $f\colon \bar{\mathbb{E}} \to \mathbb{C}$ gibt, mit $f(z) = z^{-n}$ für $z \in \partial\mathbb{E}$.

    Hinweis: Führen Sie einen indirekten Beweis und untersuchen Sie $g(z) := z^{n-1}f(z)$, $z \in \bar{\mathbb{E}}$.

60. Sei $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ ein geschlossener stückweise stetig differenzierbarer Weg in $\mathbb{C}$.
    a) Zeigen Sie: Für $c \notin |\gamma|$ gilt $\mathrm{ind}_\gamma(c) = \mathrm{ind}_{\gamma-c}(0)$.
    b) Wir berechnen also $\mathrm{ind}_\gamma(0)$, wobei $0 \notin |\gamma|$. Sei $\gamma = \gamma_1 + \ldots + \gamma_n$, $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$. Für $1 \leq j \leq n$ sei $B_{r_j}(p_j)$ eine Kreisscheibe, die 0 nicht enthält, und $\gamma_j\colon [t_{j-1}, t_j] \to B_{r_j}(p_j)$. Auf $B_{r_j}(p_j)$ sei $L_j(z) = \ln|z| + \mathrm{i}\arg_j(z)$, $z \in B_{r_j}(p_j)$, eine Logarithmusfunktion. Zeigen Sie: $L_j(z)$ ist eine Stammfunktion von $1/z$ auf $B_{r_j}(p_j)$, und berechen Sie $\mathrm{ind}_\gamma(0)$ als

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\gamma_1+\ldots+\gamma_n} \frac{1}{\zeta} d\zeta.$$

Formulieren Sie Prüfungsfragen zum Stoff der Vorlesung. Bearbeiten und diskutieren Sie diese auch in kleinen Arbeitsgruppen. Senden Sie die Fragen im Laufe des Semesters an `fripert@uni-graz.at` . Jede(r) Studierende sollte mindestens eine Frage an mich senden. Ihre Fragen werden von mir in einer Fragensammlung herausgegeben und teilweise auch bei der Prüfung Verwendung finden.