1. Proseminar zur Einführung in die komplexe Analysis

Aufgaben für den 8.10.2012

1. Für α, β, $\gamma \in \mathbb{C}$ beweisen Sie: Die Menge $\{z \in \mathbb{C} \mid z\bar{z} + \alpha z + \beta\bar{z} + \gamma = 0\}$ ist genau dann eine Kreislinie bezüglich der Euklidischen Metrik, wenn $\bar{\alpha} = \beta$ und $\alpha\beta - \gamma > 0$.

2. Identifizieren Sie die punktierte komplexe Ebene $\mathbb{C}^* := \mathbb{C}\setminus\{0\}$ mit dem punktierten Euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Für $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}^*$, $x, y \in \mathbb{R}$, beschreiben Sie den Betrag $r(z)$ und das Argument $\arg(z)$ (in $(-\pi, \pi]$) als Funktionen $r(x, y)$ und $\arg(x, y)$. Für das Argument geben Sie zwei Darstellungen mittels arctan bzw. arccos an. Sind diese Funktionen stetig?

Eigenschaften reeller Funktionen, die verschieden sind von Eigenschaften holomorpher Funktionen.

3. Zeigen Sie, dass die Ableitung der Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$$f(x) := \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$
in 0 nicht stetig ist.

4. Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$$f(x) := \begin{cases} \exp(-1/x^2) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$
auf ganz $\mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar aber in keiner Umgebung von 0 in eine Potenzreihe entwickelbar ist.

5. Zeigen Sie, dass die Nullstellenmenge der Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$$f(x) := \begin{cases} \exp(-1/x^2)\sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$
einen Häufungspunkt besitzt, wobei f beliebig oft auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist mit $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \geq 0$.

6. (a) Geben Sie eine nichtkonstante, auf ganz $\mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, die beschränkt ist.

   (b) Geben Sie eine auf ganz $\mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ungleich 0 an, die eine überabzählbare Nullstellenmenge besitzt.

7. (a) Sei $I = [a, b]$ mit $a < b$ ein kompaktes Intervall in $\mathbb{R}$. Geben Sie eine nichtkonstante, beliebig oft differenzierbare Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ an, die ihr Maximum im Inneren von I annimmt.

   (b) Geben Sie eine nichtkonstante, beliebig oft differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und eine in $\mathbb{R}$ offene Menge $U \subset \mathbb{R}$ an, so dass $f(U)$ nicht offen in $\mathbb{R}$ ist.