1. Übung zur Diskreten Mathematik

Aufgaben für den 1.10.2013 und 8.10.2013

Eine Menge M wird durch die Gesamtheit ihrer Elemente beschrieben. Z.B. $M = \{1, 2, 3, 99\}$, $M = \mathbb{Z}$, die Menge der ganzen Zahlen, $M = \{x \in \mathbb{Z} \mid 3x > -x + 7\}$, $M = \emptyset$, die leere Menge, die kein Element enthält.

Zwei Mengen A, B sind genau dann gleich, wenn A eine Teilmenge von B und B eine Teilmenge von A ist, wir schreiben $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$. Das heißt: Jedes Element von A ist ein Element von B, und jedes Element von B ist ein Element von A, was man auch so formuliert: Für alle $a \in A$ gilt $a \in B$, und für alle $b \in B$ gilt $b \in A$.

Wie beweist man eine Aussage für alle $a \in A$? Entweder, indem man die Gültigkeit der Behauptung für jedes Element $a \in A$ explizit nachrechnet, oder indem man die Aussage für ein allgemeines Element $a \in A$ nachrechnet, wobei wir in diesem Beweis von a nur diejenigen Eigenschaften verwenden dürfen, die aus der Tatsache folgen, dass a ein Element von A ist.

Seien X und Y Mengen. Das *Kartesische Produkt* $X \times Y$ von X und Y ist die Menge

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}.$$

Die Elemente von $X \times Y$ sind *Paare*. Allgemein gilt für Paare $(u, v), (x, y) \in X \times Y$

$$(u, v) = (x, y) \text{ genau dann, wenn } u = x \text{ und } v = y.$$

Überlegen Sie, wie die Menge $X \times \emptyset$ oder $\emptyset \times X$ für eine beliebige Menge X aussieht.

1. Seien X, Y Mengen. Wann gilt $X \times Y = Y \times X$? (Hinweis: Finden Sie eine Formulierung. „Dieser Sachverhalt gilt genau dann, wenn ....“ Beweisen Sie: Wenn $X \times Y = Y \times X$ gilt, dann gilt auch .... Und beweisen Sie, wenn ... gilt, dann ist $X \times Y = Y \times X$.)

Seien X, Y Mengen und $F \subseteq X \times Y$. Das Tripel (X, Y, F) stellt genau dann eine *Funktion* dar, wenn es zu jedem $x \in X$ genau ein $y \in Y$ gibt mit $(x, y) \in F$. Die Menge X heißt *Definitionsbereich*, die Menge Y *Wertebereich* oder *Bildbereich* der Funktion. Die Menge F wird auch als der *Graph* der Funktion bezeichnet. Zwei Funktionen (X, Y, F) und (U, V, G) sind genau dann gleich, wenn $X = U$, $Y = V$ und $F = G$. Funktionen nennt man auch *Abbildungen*.

Oft gibt man anstelle von $F \subseteq X \times Y$ eine Vorschrift f an, die jedem $x \in X$ das eindeutig bestimmte $y \in Y$ mit $(x, y) \in F$ zuordnet. Man schreibt dann auch $f \colon X \to Y$, $f(x) = y$. (Achtung $f(x) = y \in Y$ muss durch x für jedes $x \in X$ eindeutig festgelegt sein.) In diesem Fall beschreibt dann das Tripel (X, Y, f), oder normalerweise $f \colon X \to Y$, $f(x) = \ldots$ die Funktion. Wenn es klar ist wie der Definitionsbereich und Bildbereich einer Funktion definiert sind spricht man oft nur von der Funktion f.

Eine Funktion (X, Y, F) heißt genau dann *injektiv*, wenn es zu jedem $y \in Y$ höchstens ein $x \in X$ gibt, so dass $(x, y) \in F$. Sie heißt genau dann *surjektiv*, wenn es zu jedem $y \in Y$ mindestens ein $x \in X$ gibt, so dass $(x, y) \in F$. Sie heißt *bijektiv*, falls sie injektiv und surjektiv ist.

2. Untersuchen Sie, für welche Mengen $F \subseteq X \times Y$ die Tripel (X, Y, F) Funktionen sind. Falls F keine Funktion darstellt, ändern Sie F so ab, dass wir eine Funktion erhalten. (Dies ist auf verschiedene Weisen möglich.) Sind diese Funktionen injektiv, surjektiv oder bijektiv?
   (a) $X = \{\clubsuit, \spadesuit, \diamondsuit, \heartsuit\}$, $Y = \{\blacksquare, \square, \triangle\}$, $F = \{(\clubsuit, \triangle), (\diamondsuit, \diamondsuit), (\heartsuit, \triangle), (\heartsuit, \square)\}$, wobei $\clubsuit, \spadesuit, \diamondsuit, \heartsuit, \blacksquare, \square, \triangle$ paarweise verschiedene Symbole sind.
   (b) $X = Y = \{0, 1, 2, 3, 4\} \subset \mathbb{Z}$, $F = \{(i, j) \in X \times Y \mid i = j^2\}$.
   (c) $X = Y = \{2, 4, 6, 8\} \subset \mathbb{Z}$, $F = \{(a, b) \in X \times Y \mid a = ab/2\}$.
   (d) $X = \mathbb{Z}$, $Y = \mathbb{Z}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 0\}$, $F = \{(a, b) \in X \times Y \mid b = 2|a| + 1\}$.

Sei $f: X \to Y$ eine Funktion. Das *Bild* von $A \subseteq X$ unter f ist die Menge

$$f(A) = \{y \in Y \mid \text{es gibt ein } x \in A \text{ mit } f(x) = y\} = \{f(x) \mid x \in A\}.$$

Das *Urbild* von $B \subseteq Y$ unter f ist die Menge

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid \text{es gibt ein } y \in B \text{ mit } f(x) = y\} = \{x \in X \mid f(x) \in B\}.$$

Seien $f: X \to Y$ und $g: U \to V$ Funktionen. Falls das Bild $g(U)$ von g eine Teilmenge des Definitionsbereichs X von f ist, (also $g(U) \subseteq X$,) dann ist $f \circ g$ (gelesen als „f nach g“) jene Funktion mit Definitionsbereich U und Wertebereich Y, die durch $(f \circ g)(u) = f(g(u))$ für alle $u \in U$ definiert ist. Dies ist die *Komposition* oder *Hintereinanderausführung* der Funktionen f und g. Beachten Sie, dass $g(u) \in X$ für jedes $u \in U$.

Falls f, g, h Funktionen sind, deren Kompositionen $f \circ g$ und $g \circ h$ definiert sind, dann sind auch die Kompositionen $(f \circ g) \circ h$ und $f \circ (g \circ h)$ definiert. (Wieso?) Sie stimmen sogar überein. (Wieso?)

Falls $f, g: X \to X$ Funktionen sind, dann sind beide Kompositionen $f \circ g$ und $g \circ f$ definiert. Im allgemeinen stimmen sie nicht überein. Die Hintereinanderausführung ist also eine *assoziative* aber nicht *kommutative* Verknüpfung solcher Funktionen.

Sei $f: X \to Y$ eine bijektive Funktion. Dann gibt es eine Funktion $g: Y \to X$, sodass für alle $x \in X$ und $y \in Y$ gilt: $g(y) = x$ genau dann, wenn $f(x) = y$. (Wieso?) Die Funktion heißt die zu f *inverse Funktion* oder *Umkehrfunktion* von f. Meist wird sie als f^{-1} geschrieben. (Verwechseln Sie nicht den Wert $f^{-1}(y)$, $y \in Y$, der Umkehrfunktion mit dem Urbild $f^{-1}(B)$, $B \subseteq Y$, von f.) Es gilt dann $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y$, wobei die *Identität* auf einer Menge X definiert ist als $\mathrm{id}_X: X \to X$, $\mathrm{id}_X(x) = x$ für alle $x \in X$.Überlegen Sie sich Zusammenhänge zwischen „bijektiven Funktionen“ und „Umkehrfunktionen“.

3. Beweisen Sie für Funktionen $f: X \to Y$:
   (a) f ist genau dann injektiv, wenn für alle $x_1, x_2 \in X$ aus $f(x_1) = f(x_2)$ die Gleichheit von x_1 und x_2 folgt. (Der Beweis besteht mehr oder weniger aus einem Unformulieren der Definition.)
   (b) f ist genau dann injektiv, wenn für alle $x_1, x_2 \in X$ aus $x_1 \neq x_2$ Ungleichheit

von $f(x_1)$ und $f(x_2)$ folgt.(Indirekter Beweis: Um zu beweisen dass aus der Aussage P die Aussage Q folgt, nimmt man an, dass unter der Voraussetzung von P die Aussage Q nicht gilt, und beweist einen Widerspruch zu P.)
(c) f ist genau dann surjektiv, wenn $f(X) = Y$.
(d) Finden Sie eine Charakterisierung von Bijektivität, die der Definition von injektiv oder surjektiv entspricht. (Dies liefert eine Erklärung, warum man die inverse Funktion zu einer bijektiven Funktion wie oben angegeben definieren kann.)

Hinweis: Wie beweist man, dass die Aussage P genau dann gilt, wenn die Aussage Q gilt? (Man schreibt auch $P \iff Q$ und sagt P und Q sind zueinander äquivalent.) Man zeigt, dass aus P die Auusage Q folgt, und dass aus Q die Aussage P folgt. (Wir schreiben dafür auch $P \implies Q$ und $Q \implies P$.)

4. Sei $f\colon X \to Y$ eine bijektive Funktion. Beweisen Sie, dass $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y$.

5. Was kann man über Injektivität, Surjektivität oder Bijektivität der Komposition $f \circ g$ zweier injektiver, surjektiver oder bijektiver Funktionen $f\colon X \to Y$, $g\colon U \to V$, $g(U) \subseteq X$, aussagen? Beweisen Sie Ihre Behauptungen.

6. Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung und seien $g\colon Y \to X$ und $h\colon Y \to X$ Funktionen, so dass $h \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$. (Die Funktion h ist dann *linksinvers* zu f, die Funktion g *rechtsinvers*.) Zeigen Sie, dass $g = h$.

7. Bestimmen Sie eine Tabelle aller Funktionen $f\colon \{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$ und untersuchen Sie diese auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität. Was fällt Ihnen dabei auf? Finden Sie darunter zwei bijektive Funktionen f_i, f_j ungleich der Identität, sodass deren Komposition nicht die Identität ist, und dass $f_i \circ f_j \neq f_j \circ f_i$.

f	f_1	f_2	$\ldots$
$f(1)$	1	1	
$f(2)$	1	1	
$f(3)$	1	2	

8. Bestimmen Sie Funktionen $f\colon \mathbb{Z}_{\geq 0} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ mit den folgenden Eigenschaften und beweisen Sie, dass f tatsächlich die gewünschten Eigenschaften besitzt:
(a) f ist bijektiv aber verschieden von der Identität.
(b) f ist injektiv aber nicht surjektiv.
(c) f ist surjektiv aber nicht injektiv.