10. Übung zur Diskreten Mathematik

Aufgaben für den 10.12.2013

Wählen Sie mindestens fünf Aufgaben aus!

54. Auf einem karierten Papier zeichnet man Wege von Nullpunkt $(0,0)$ aus zu einem Punkt (n,k) mit $n,k \in \mathbb{N}_0$. Dabei darf man sich nur entlang der Gitterlinien nach rechts oder oben bewegen. Die Gitterlinien laufen durch alle Punkte mit ganzzahligen Koordinaten. Die einzelnen Schritte sind also von der Form: $x \mapsto x+(0,1)$ oder $x \mapsto x+(1,0)$ für $x \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$. Man spricht von einem Nord-Ost-Gitterpfad. Wieviele solche Pfade gibt es zwischen $(0,0)$ und (n,k)?.

55. Eine Multimenge $\mathcal{M} = (M,f)$ wird durch eine Menge M und eine Funktion $f\colon M \to \mathbb{N}_0$ beschrieben. Im Unterschied zu einer gewöhnlichen Menge kann eine Multimenge ein Element auch mehrfach enthalten. Die Vielfachheit mit der das Element $m \in M$ in $\mathcal{M}$ auftritt wird durch $f(m)$ angegeben. Der Umfang von $\mathcal{M}$ ist $\sum_{m\in M} f(m)$. Die Teilmenge $M' = \{m \in M \mid f(m) > 0\}$ von M heißt der Träger oder support von $\mathcal{M}$. Wir sagen auch $\mathcal{M}$ ist eine Multimenge über M.

    Sei $|M| = n$. Wieviele Multimengen vom Umfang k gibt es über M?

    Hinweis: Finden Sie einen Strukturtransport zwischen den Multimengen über M und den Multimengen über $\langle n\rangle$. Führen Sie das Abzählen der letzteren mit dem Bijektionsprinzip auf das Abzählen einer bekannten Struktur zurück.

56. Seien $n,k \in \mathbb{N}$. Eine Komposition von n in k Summanden heißt stark, falls alle Summanden größer als 0 sind. Wieviele starke Kompositionen gibt es von n in k Summanden?

57. Wieviele Totalordnungen gibt es auf einer Menge mit n Elementen?

58. Wieviele verschiedene Wurfbilder gibt es mit vier nicht unterscheidbaren Würfeln?

59. Auf wieviele Weisen kann man die Buchstaben von OUAGADOUGOU (Hauptstadt von Burkina Faso, Westafrika) verschieden anordnen?

60. Wieviele Tips gibt es bei der Euromillion?
    Regeln unter: `http://www.mylottoy.net/de/euromillion/#.Upy6_eLl_zo`

61. Sei X eine endliche Menge der Mächtigkeit n. Wieviele binäre Relationen gibt es auf X, die reflexiv, symmetrisch und transitiv sind?

62. Beweisen Sie den multinomischen Lehrsatz.

63. Für wieviele Teilmengen A von $\langle n\rangle$ ist die Mächtigkeit von A größer als die Mächtigkeit des Komplements von A? Finden Sie einen möglichst einfachen Ausdruck für diese Anzahl.

64. Wie lautet der größte Koeffizient eines Monoms von $(x_1 + \ldots + x_k)^n$ falls $n \leq k$?

65. Berechnen Sie die Anzahl aller Primzahlen in $\langle 120 \rangle$, wenn Sie wissen, dass $2, 3, 5, 7$ die ersten vier Primzahlen sind.

66. Seien X, Y endliche Mengen der Mächtigkeit n und m. Beweisen Sie, dass

$$\left|Y^X\right| = m^n = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k} (m)_k.$$

Hinweis: Zu jeder Funktion $f \in Y^X$ gibt es die surjektive Funktion $\tilde{f}\colon X \to f(X)$, $\tilde{f}(x) = f(x)$, $x \in X$.

67. Sei $(\!(x)\!)_k = \prod_{j=0}^{k-1} (x + j)$ für $x \in \mathbb{C}$ die steigende Faktorielle. Damit definieren wir

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \frac{(\!(n)\!)_k}{k!}.$$

Berechnen Sie $\left(\!\binom{x}{k}\!\right)$ und beweisen Sie: $\left(\!\binom{x}{k}\!\right) = \left(\!\binom{x}{k-1}\!\right) + \left(\!\binom{x-1}{k}\!\right)$, $\left(\!\binom{x}{k}\!\right) = \frac{x}{k} \left(\!\binom{x+1}{k-1}\!\right) = \frac{x+k-1}{k} \left(\!\binom{x}{k-1}\!\right)$, $\left(\!\binom{x+1}{k}\!\right) = \sum_{j=0}^{k} \left(\!\binom{x}{j}\!\right)$ für $x \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$.

Das Übungsblatt zählt für 5 Beispiele.