13. Übung zur Diskreten Mathematik

Aufgaben für den 14.1.2014

82. Seien $n, k \in \mathbb{N}_0$. Eine Folge $(a_1, \ldots, a_k)$ von ganzen Zahlen mit $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_k \geq 1$ und $a_1 + \ldots + a_k = n$ heißt Partition von n (in k Summanden). Die Anzahl der Partitionen von n in k Summanden sei mit $p_{n,k}$ bezeichnet.

    (a) Berechnen Sie $p_{0,0}$, $p_{n,0}$, $n \geq 1$, $p_{n,k}$, $k > n \geq 0$, $p_{n,1}$, $n \geq 1$, und $p_{n,n}$, $n \geq 0$.

    (b) Zeigen Sie dass die Rekursionsformel gilt:

    $$p_{n+k,k} = \sum_{i=1}^{k} p_{n,i}, \qquad n \geq 1,\ k \geq 0.$$

    Berechnen Sie die Werte $p_{n,k}$ für $0 \leq k \leq n \leq 8$. (Hinweis: Sei $a = (a_1, \ldots, a_k)$ eine Partition von $n + k$ in k Summanden. Was erhalten Sie aus a, wenn Sie jeden Summanden a_i um 1 verkleinern und auftretende 0-en weglassen?)

    (c) Zeigen Sie mit einem geometrischen Argument, dass die Anzahl der Partitionen von n in k Summanden gleich der Anzahl der Partitionen von n mit größtem Summand gleich k ist.

    (d) Welche Beziehung besteht zwischen $p_{n,k}$ und der Anzahl der starken Kompositionen von n in k Summanden?

    (e) Sei $\tilde{p}_{n,k} = \sum_{j=0}^{k} p_{n,j}$ die Anzahl aller Partitionen von n in höchstens k Summanden. Zeigen Sie, dass $\tilde{p}_{0,0} = 1$, $\tilde{p}_{n,0} = 0$, $n \geq 1$, $\tilde{p}_{n,1} = 1$, $n \geq 0$, $\tilde{p}_{n,2} = 1 + \lfloor n/2 \rfloor$, $n \geq 0$. Beweisen Sie, dass $\tilde{p}_{n,k}$ für $k \geq n$ die Anzahl aller Partitionen von n angibt, und dass die Rekursionsformel gilt:

    $$\tilde{p}_{n,k} = \tilde{p}_{n-k,k} + \tilde{p}_{n,k-1}, \qquad 1 \leq k \leq n.$$

    Berechnen Sie die Werte $\tilde{p}_{n,k}$ für $0 \leq k \leq n \leq 8$.

83. Sei $\pi \in S_n$, $n \in \mathbb{N}_0$, eine Permutation. Die Position $i \in \langle n-1 \rangle$ heißt ein Anstieg (bzw. Abstieg) von π falls $\pi(i) < \pi(i+1)$ (bzw. $\pi(i) > \pi(i+1)$). Sei $E_{n,k}$ die Anzahl der Permutationen in S_n, die genau $k \in \mathbb{N}_0$ Anstiege besitzen.

    (a) Zeigen Sie: $E_{n,0} = 1$, $n \geq 0$, $E_{n,n-1} = 1$, $n \geq 1$, $E_{n,k} = 0$, $k \geq n \geq 1$, $E_{n,k} = E_{n,n-1-k}$, $0 \leq k \leq n-1$, $\sum_{k=0}^{n-1} E_{n,k} = n!$, $n \geq 1$.

    (b) Zeigen Sie dass die Rekursionsformel gilt:

    $$E_{n,k} = (k+1)E_{n-1,k} + (n-k)E_{n-1,k-1}, \qquad 1 \leq k \leq n-1.$$

    Hinweis: Sei $\pi \in S_{n-1}$ geschrieben als $(\pi(1), \ldots, \pi(n-1))$. Setzt man nun den Wert n als zusätzlichen Wert an irgendeiner Stelle in diesen Vektor ein, erhält man eine Permutation aus S_n. An welchen Stellen kann man n einsetzen, falls π genau k (bzw. $k-1$) Anstiege besitzt, um eine Permutation in S_n mit genau k Anstiegen zu erhalten?

84. Der 12-fache Weg. Seien X und Y endliche Mengen der Mächtigkeiten n und m. Die Symmetrischen Gruppen S_X und S_Y operieren auf natürliche Weise als Permutationsgruppen auf X und Y. Für $G \in \{S_X, \{\mathrm{id}_X\}\}$ und $H \in \{S_Y, \{\mathrm{id}_Y\}\}$ untersuchen wir die Bahnen von $H \times G$ auf $\mathrm{Abb}(X, Y)$, $\mathrm{Inj}(X, Y)$ und $\mathrm{Surj}(X, Y)$.

Das ergibt 12 verschiedene Abzählprobleme. Finden Sie für jede dieser Situationen eine natürliche Interpretation und bestimmen Sie die Anzahlen der Objekte in den jeweiligen Situationen. (Es ist hilfreich X als $\langle n\rangle$ und Y als $\langle m\rangle$ aufzufassen.) Füllen Sie die Werte ein

$H\times G$	$\lvert H\times G\backslash\backslash \operatorname{Abb}(X,Y)\rvert$	$\lvert H\times G\backslash\backslash \operatorname{Inj}(X,Y)\rvert$	$\lvert H\times G\backslash\backslash \operatorname{Surj}(X,Y)\rvert$
$\{\mathrm{id}_Y\}\times\{\mathrm{id}_X\}$			
$\{\mathrm{id}_Y\}\times S_X$			
$S_Y\times\{\mathrm{id}_X\}$			
$S_Y\times S_X$			

Hinweis: Betrachte die Aktion von S_X auf X, dann ist die Bahn von x die gesamte Menge X. Daher sind die Elemente aus X nicht unterscheidbar. Die Gruppe $\{\mathrm{id}_X\}$ besteht nur aus dem neutralen Element, weshalb die Bahn von $x\in X$ nur aus x besteht. In diesem Fall sind alle Elemente von X unterscheidbar. Betrachten wir z.B. die Operation von $\{\mathrm{id}_Y\}\times S_X$, also die Operation von S_X am Definitionsbereich der Funktionen. Für $X=\langle n\rangle$, schreiben wir $f\in\operatorname{Abb}(X,Y)$ als $(f(1),\ldots,f(n))$. Da die symmetrische Gruppe operiert, liegt jede Funktion, die durch eine beliebige Umordnung dieses Vektors ensteht, in der Bahn von f. Wir können also jede beliebige Anordnung dieses Vektors als Repräsentant der Bahn von f auswählen. Finden Sie Repräsentanten der Bahnen mit einer besonderen Eigenschaft, so dass wir die Menge der Repräsentanten abzählen können.

85. Sei ${}_GX$ ein Gruppenaktion. Sei R ein kommutativer Ring, der $\mathbb{Q}$ als Unterring enthält. (Meist ist R ein Polynomring der Form $\mathbb{Q}[z_1,\ldots,z_r]$ mit geeigneten Unbestimmten z_j, $j\in\langle r\rangle$.) Eine Abbildung $w\colon X\to R$ heißt mit der Gruppenaktion verträgliche Gewichtsfunktion, falls $w(x)=w(gx)$ für alle $x\in X$ und $g\in G$ gilt. In diesem Fall kann man das Gewicht $w(G(x))$ als das Gewicht $w(x)$ eines beliebigen Repräsentanten x von $G(x)$ festlegen.

(a) Beweisen Sie die gewichtete Version des Lemmas von Cauchy–Frobenius. Ist w eine mit der Aktion ${}_GX$ verträgliche endliche Gruppenaktion, dann gilt

$$\sum_{\omega\in G\backslash\backslash X} w(\omega)=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\sum_{x\in X_g} w(x).$$

Ist die normale Version des Lemmas von Cauchy–Frobenius ein Spezialfall dieser Formel?

(Hinweis: Verallgemeinern Sie den Beweis des Lemmas von Cauchy–Frobenius.)

(b) Sei ${}_GX$ eine Gruppenaktion. Betrachten wir die induzierte Operation auf Y^X, wobei $(gf)(x)=(f\circ\bar{g}^{-1})(x)$, $x\in X$, $g\in G$, $f\in Y^X$. Sei R ein kommutativer Ring, der $\mathbb{Q}$ als Unterring enthält. Zeigen Sie: sei $W\colon Y\to R$ eine beliebige Abbildung, dann ist die Abbildung $w\colon Y^X\to R$, $w(f)=\prod_{x\in X} W(f(x))$, eine mit der Aktion von G auf Y^X verträgliche Gewichtsfunktion.

(c) Seien X,Y endliche Mengen, ${}_GX$ eine Aktion der endlichen Gruppe G auf X. Dann gilt unter Verwendung der Notation aus (b):

$$\sum_{\omega\in G\backslash\backslash Y^X} w(f)=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\prod_{i=1}^{|X|}\left(\sum_{y\in Y} W(y)^i\right)^{a_i(\bar{g})},$$

wobei $(a_1(\bar{g}), \ldots, a_{|X|}(\bar{g}))$ der Zykeltyp von $\bar{g}$ der Permutationsdarstellung von $g \in G$ ist.

(d) Verwenden Sie die Formel aus (c) zur Lösung der Aufgaben 78 und 79.

Zusatzaufgaben:

1. (a) Wie kann man unter Verwendung der in 1.9 eingeführten Totalordnung $\leq$ auf $\mathbb{Z}$ die auf $\mathbb{Q}$ bekannte Totalordnung definieren?

   (b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie für alle $k \in \mathbb{N}_0$, dass
$$\frac{(n)_k}{n^k} \in [0,1], \qquad \text{und} \qquad \frac{(n)_k}{n^k} \geq \frac{(n)_{k+1}}{n^{k+1}}.$$

   (c) Für $1 \leq n \leq 8$ und $n = 365$ bestimmen Sie jeweils $\min\{k \in \mathbb{N}_0 \mid 2(n)_k \leq n^k\}$.

   (d) Unter der Annahme, dass es genau 365 verschiedene Geburtstage pro Jahr gibt, und die Geburten über alle Tage eines Jahres gleich verteilt sind, bestimmen Sie das kleinste $k \in \mathbb{N}$, so dass die Wahrscheinlichkeit, dass unter k zufällig ausgewählten Personen mindestens zwei am gleichen Tag Geburtstag haben, größer als 50% beträgt. Wieviele 2-Mengen von Personen kann man mit diesen k Personen bilden?

   (e) Wieviele Personen muß man mindestens auswählen, dass diese Wahrscheinlichkeit 100% beträgt.

   (f) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter k zufällig ausgewählten Personen mindestens eine Person am gleichen Tag wie ich Geburtstag hat? Wie groß muß k mindestens sein, dass diese Wahrscheinlichkeit größer als 50% ist? Wie groß muß k mindestens sein, dass diese Wahrscheinlichkeit 100% beträgt?

2. Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Eine geordnete Mengenpartition von X in k Blöcke ist ein k-Tupel $(B_1, \ldots, B_k)$ von Teilmengen von X, so dass $\{B_1, \ldots, B_k\}$ eine Partition von X in k Blöcke darstellt.

   (a) Sei X eine n-Menge. Geben Sie einen Strukturtransport zwischen der Menge der geordneten Partitionen von X in k Blöcke und der Menge der geordneten Partitionen von $\langle n \rangle$ in k Blöcke an.

   (b) Sei $\sigma_{n,k}$ die Anzahl der geordneten Partitionen von $\langle n \rangle$ in k Blöcke. Drücken Sie $\sigma_{n,k}$ als Summe von Multinomialkoeffizienten aus.

   (c) Welche Klasse von Funktionen wird mit $\sigma_{n,k}$ abgezählt. Welche Beziehung besteht zwischen $\sigma_{n,k}$ und den Stirlingschen Zahlen 2. Art?

   (d) Berechnen Sie die Werte $\sigma_{0,0}$, $\sigma_{n,0}$, $n \geq 1$, $\sigma_{n,k}$, $k > n$, $n \in \mathbb{N}_0$, $\sigma_{n,1}$, $n \geq 1$, und $\sigma_{n,n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

   (e) Zeigen Sie, dass die Rekursionsformel gilt:
$$\sigma_{n,k} = k\sigma_{n-1,k-1} + k\sigma_{n-1,k}, \qquad n \geq k \geq 1.$$

   Berechnen Sie die Werte $\sigma_{n,k}$ für $0 \leq k \leq n \leq 8$.

   (f) Sei $P_n = \sum_{k=0}^{n} \sigma_{n,k}$ die Anzahl aller geordneten Partitionen von $\langle n \rangle$. Zeigen Sie, dass $P_0 = 1$ und
$$P_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} P_{n-k} = \sum_{J=0}^{n-1} \binom{n}{j} P_j, \qquad n \geq 1.$$