2. Übung zur Diskreten Mathematik

Aufgaben für den 15.10.2013

9. Geben Sie eine geometrische Motivation und beweisen Sie, dass

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$$

   für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

10. Beweisen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Zahl $8^n - 14n + 27$ ein Vielfaches von 7 ist.

11. Zeigen Sie, dass $n^2 < 2^n$ für alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 5}$ gilt.

12. Sei n eine natürliche Zahl. Es sitzen n Patienten im Wartezimmer eines Arztes. Jeder von ihnen erhielt eine Nummer von 1 bis n zugeteilt. Keine zwei verschiedene Personen erhielten die gleiche Nummer. Die Patienten werden nicht notwendigerweise in der Reihenfolge der Nummern aufgerufen, die sie erhalten haben, jedoch muß keiner mehr Personen vorlassen, als wenn er in der Reihenfolge der verteilten Nummern an die Reihe käme. D.h., der Patient mit Nummer i wird nach höchstens $i - 1$ Personen in das Arztzimmer gerufen.

    Als Patient X das hört meint er: „Das bedeutet ja nichts Anderes, als dass wir in der Reihenfolge der ausgegebenen Nummern aufgerufen werden!“ Hat er recht?

13. Untersuchen Sie ob $(\mathbb{N}, |)$ oder $(\mathbb{Z}^*, |)$ Ordnungen sind? Sind sie etwa auch Totalordnungen? (Für $a, b \in \mathbb{Z}^*$ bedeute $a \mid b$, dass a ein Teiler von b ist.)

14. Beweisen Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ und alle $a \in \mathbb{Z}^*$, $b_i, c_i \in \mathbb{Z}$, $1 \leq i \leq n$: Aus $a \mid b_i$, für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$, folgt $a \mid \sum_{i=1}^{n} b_i c_i$.

Zusatzaufgaben:

1. Beweisen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: Jede nichtleere Teilmenge $A \subseteq \{1, \ldots, n\}$ besitzt ein minimales Element.

2. Finden Sie unter Verwendung von 1. einen direkten Beweis dafür, dass jede nichtleere Teilmenge A von $\mathbb{N}$ ein minimales Element besitzt.

3. Beweisen Sie mit Induktion nach n: Für alle $a, b \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{j=0}^{n-1} a^j b^{n-1-j}.$$

   Hinweis: Für $n \in \mathbb{N}_0$ ist $a^n = \prod_{i=1}^{n} a$, $a \in \mathbb{C}$.