3. Übung zur Diskreten Mathematik

Aufgaben für den 22.10.2013

15. Sei $p \in \mathbb{P}$, $p > 2$. Zeigen Sie, dass 24 ein Teiler von $p^3 - p$ ist. (Ist das eine besondere Eigenschaft von Primzahlen?)

16. Zeigen Sie, dass 13 alle im Dezimalsystem 6-stelligen Zahlen der Form *abcabc* mit $a, b, c \in \{0, \ldots, 9\}$, $a \neq 0$, teilt.

17. Zeigen Sie, dass für relativ prime Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ gilt: $\mathrm{ggT}(a + b, a - b) \in \{1, 2\}$.

18. Sei $n \in \mathbb{Z}_{>1}$. Beweisen Sie, dass aus $n \mid ((n - 1)! + 1)$ folgt, dass $n \in \mathbb{P}$.

19. Berechnen Sie (a) $\mathrm{ggT}(525, 231)$ und seine additive Darstellung.

    (b) $\mathrm{ggT}(221598600, 333635640)$ und seine additive Darstellung.

    (c) $\mathrm{ggT}(1585, -2536, 0, 4438, -1585)$.

    (d) den ggt aller Zahlen aus Aufgabe 16.

20. Für ganze Zahlen n, k mit $0 \leq k \leq n$ ist der Binomialkoeffizient n über k definiert als

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Zeigen Sie, dass $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ gilt, und dass für $k < n$ die Beziehung

$$\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

besteht. Folgern Sie daraus, dass für alle $x, y \in \mathbb{C}$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ der binomische Lehrsatz

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

gilt.

Zusatzaufgaben:

1. Sei $N_1 \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie eine Zahl N_2, indem Sie alle Ziffern der im Dezimalsystem geschriebenen positiven Teiler von N_1 aufsummieren. Z.B. für $N_1 = 12$ ist $T(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ und $N_2 = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 1 + 2 = 19$. Berechnen Sie N_3 indem Sie diesen Vorgang auf N_2 anwenden. (Man spricht von Iteration.) Was fällt Ihnen auf, wenn Sie diesen Vorgang oft genug iterieren?

2. Betrachten Sie die Funktion $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}$, $f(x) = x^2 + x + 41$, und berechnen Sie wie Werte $f(0), f(1), f(2), \ldots$? Was fällt Ihnen auf? Wann muß diese Funktion ihr Verhalten spätestens ändern?

3. Sei $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie die folgende Behauptung: Unter je $n+1$ zufällig ausgewählten Zahlen von $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ gibt es mindestens zwei Zahlen, von denen die eine die andere teilt.

4. Beweisen Sie, dass $\mathbb{Z}$ ein Hauptidealring ist. Ein Ideal $I \subseteq \mathbb{Z}$, $I \neq \mathbb{Z}$ heißt maximal, falls für jedes Ideal $J \subseteq \mathbb{Z}$ mit $I \subseteq J$ entweder $J = I$ oder $J = \mathbb{Z}$ gilt. Bestimmen Sie die maximalen Ideale in $\mathbb{Z}$.

5. Auf der Menge $\mathbb{Z}_4 = \{4\mathbb{Z}, 4\mathbb{Z}+1, 4\mathbb{Z}+2, 4\mathbb{Z}+3\}$ seien eine Addition und eine Multiplikation wie in der Vorlesung für $\mathbb{Z}_2$ definiert. Ist $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ ein Körper?