11. Übung zur Diskreten Mathematik

Aufgaben für den 12.1.2016

41. Seien $n, k \in \mathbb{N}_+$. Eine Komposition von n in k Summanden heißt stark, falls alle Summanden größer als 0 sind. Wieviele starke Kompositionen gibt es von n in k Summanden?

42. Wieviele Totalordnungen gibt es auf einer Menge mit n Elementen?

43. Auf wieviele Weisen kann man die Buchstaben von OUAGADOUGOU (Hauptstadt von Burkina Faso, Westafrika) verschieden anordnen?

44. Wieviele Tips gibt es bei der Euromillion?
Regeln unter: `https://www.euro-millions.com/de/regeln`

45. Seien $n, k \in \mathbb{N}$. Eine Folge $(a_1, \ldots, a_k)$ von ganzen Zahlen mit $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_k \geq 1$ und $a_1 + \ldots + a_k = n$ heißt Partition von n (in k Summanden). Die Anzahl der Partitionen von n in k Summanden sei mit $p_{n,k}$ bezeichnet.

    (a) Berechnen Sie $p_{0,0}$, $p_{n,0}$, $n \geq 1$, $p_{n,k}$, $k > n \geq 0$, $p_{n,1}$, $n \geq 1$, und $p_{n,n}$, $n \geq 0$.

    (b) Zeigen Sie dass die Rekursionsformel gilt:

    $$p_{n+k,k} = \sum_{i=1}^{k} p_{n,i}, \qquad n \geq 1,\ k \geq 0.$$

    Berechnen Sie die Werte $p_{n,k}$ für $0 \leq k \leq n \leq 8$. (Hinweis: Sei $a = (a_1, \ldots, a_k)$ eine Partition von $n+k$ in k Summanden. Was erhalten Sie aus a, wenn Sie jeden Summanden a_i um 1 verkleinern und auftretende 0-en weglassen?)

    (c) Zeigen Sie mit einem geometrischen Argument, dass die Anzahl der Partitionen von n in k Summanden gleich der Anzahl der Partitionen von n mit größtem Summand gleich k ist.

    (d) Welche Beziehung besteht zwischen $p_{n,k}$ und der Anzahl der starken Kompositionen von n in k Summanden?

    (e) Sei $\tilde{p}_{n,k} = \sum_{j=0}^{k} p_{n,j}$ die Anzahl aller Partitionen von n in höchstens k Summanden. Zeigen Sie, dass $\tilde{p}_{0,0} = 1$, $\tilde{p}_{n,0} = 0$, $n \geq 1$, $\tilde{p}_{n,1} = 1$, $n \geq 0$, $\tilde{p}_{n,2} = 1 + \lfloor n/2 \rfloor$, $n \geq 0$. Beweisen Sie, dass $\tilde{p}_{n,k}$ für $k \geq n$ die Anzahl aller Partitionen von n angibt, und dass die Rekursionsformel gilt:

    $$\tilde{p}_{n,k} = \tilde{p}_{n-k,k} + \tilde{p}_{n,k-1}, \qquad 1 \leq k \leq n.$$

    Berechnen Sie die Werte $\tilde{p}_{n,k}$ für $0 \leq k \leq n \leq 8$.

Zusatzaufgaben

1. Finden Sie einen kombinatorischen Beweis für die in der Vorlesung angegebene Rekursion der Stirlingschen Zahlen 2. Art.