2. Übung zur Diskreten Mathematik

Aufgaben für den 13.10.2015

6. Geben Sie eine geometrische Motivation und beweisen Sie, dass

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1)=n^2$$

   für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

7. Für welche $n \in \mathbb{N}_+$ gilt

$$2! \cdot 4! \cdots (2n)! > [(n+1)!]^n \,?$$

   Beweisen Sie Ihre Antwort. Hinweis: $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$, $n \in \mathbb{N}$.

8. Sei $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Abbildung, die $f(n+m) = f(n)+f(m)$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$ erfüllt. Zeigen Sie, es gibt ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $f(n) = n \cdot n_1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Insbesondere ist $n_1 = f(1)$.

9. Beweisen Sie für $n \in \mathbb{N}_+$

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2.$$

Zusatzaufgabe

1. Seien A und B Mengen

   Charakterisieren Sie, wann $A \setminus B = B$ gilt.

   Beschreiben Sie die Mengen $\{1\}^A$, $\{0,1\}^A$, $A^{\{1\}}$.

   Wann ist $\emptyset^A \neq \emptyset$? Gibt es darin dann eine bijektive Abbildung?