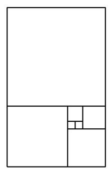
3. Übung zur Diskreten Mathematik

Aufgaben für den 20.10.2015

10. Sei $A(n)$ für $n \in \mathbb{N}_+$ eine Aussage. Sie wissen,
(I) wenn $A(n)$ gilt, dann auch $A(2n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_+$, und
(II) wenn $A(n)$ gilt, dann auch $A(n-1)$ für $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$.
Finden Sie eine möglichst einfache Voraussetzung, unter der Sie zeigen können, dass $A(n)$ für alle positiven natürlichen Zahlen n gilt. (Die Voraussetzung „$A(n)$ gelte für alle n" ist zu stark!)

11. Beweisen Sie
$$\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

12. Die Folge der Fibonacci Zahlen $(F_n)_{n \in \mathbb{N}_+}$ ist rekursiv gegeben durch
$$F_1 = 1, \qquad F_2 = 1, \qquad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n,\ n \in \mathbb{N}_+.$$
Zeigen Sie, dass
$$\sum_{j=1}^{n} F_j^2 = F_n F_{n+1}$$
für alle ganzen Zahlen $n \geq 2$ gilt. (Sei X eine Menge, $r \in \mathbb{Z}$. Eine Folge ist eine andere Darstellung einer Funktion $f\colon \mathbb{N}_+ \to X$ oder $f\colon \mathbb{Z}_{\geq r} \to X$, wobei man die Familie $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_+}$ oder $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}_{\geq r}}$ angibt, mit $f_n = f(n)$ für $n \in \mathbb{N}_+$ oder $n \in \mathbb{Z}_{\geq r}$.)



13. Berechnen Sie:

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{i=2}^{n-1} i^2$; b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{2n} i - \sum_{i=1}^{n} i$; c) $\displaystyle\sum_{i=0}^{4} 2^i - \sum_{i=0}^{4} i^2$;

d) $\displaystyle\prod_{i=2}^{10} \left(1 - \frac{1}{i}\right)$; e) $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} a^{(-1)^i},\ a \neq 0$; f) $\displaystyle\frac{\prod_{i=1}^{3n+3} i}{\prod_{i=3}^{3n+2} (i-2)}$.

Zusatzaufgabe
13 c) und f) gelten als Zusatzaufgabe.