4. Übung zur Diskreten Mathematik

Aufgaben für den 27.10.2015

14. Sei $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die Funktion $f(n) = n^2$. Definieren Sie eine Funktion $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rekursiv, so dass $f = g$ ist, und beweisen Sie die Gleicheit der beiden Funktionen.

15. Sei X eine Menge. Zeigen Sie dass $(\mathrm{Pot}(X), \subseteq)$ eine partielle Ordnung ist. Ist sie eine Totalordnung? Zeigen Sie, dass es für beliebige $A, B \in \mathrm{Pot}(X)$ sowohl $A \wedge B = \inf\{A, B\}$ als auch $A \vee B = \sup\{A, B\}$ gibt. Partielle Ordnungen mit dieser Eigenschaft heißen Verbände.

16. Zeigen Sie, dass $\lfloor . \rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, $\lfloor x \rfloor := \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$ eine Funktion definiert. Ist sie injektiv, surjektiv, bijektiv, konstant? Zeigen Sie, dass $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$ für $x \in \mathbb{R}$ gilt. Berechnen Sie $\lfloor x \rfloor$ für $x \in \mathbb{Z}$ oder $x \in \{2.5, 1.5, -1.5, \pi\}$.

    Vielleicht sind folgende Hinweise hilfreich: Falls $x \geq 0$ ist, verwenden Sie das Prinzip vom größten Element in $\mathbb{Z}$, um $\lfloor x \rfloor$ zu konstruieren. Falls $x < 0$ zeigen Sie, dass es genau eine kleinste ganze Zahl größer als x gibt, und konstruieren Sie mit dieser $\lfloor x \rfloor$.

17. Zeigen Sie, für jede positive reelle Zahl x gibt es ein $n \in \mathbb{N}_+$, so dass $\frac{1}{n} < x$. Untersuchen Sie ob Maximum, Minimum, Supremum, Infimum, maximale/minimale Elemente von
$$M = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}_+\}$$
existieren und bestimmen Sie diese gegebenenfalls.

    Wir wissen wenig über die $<$-Relation in $\mathbb{R}$. Was Sie verwenden dürfen: Wenn a, b, r positive reelle Zahlen mit $a < b$ sind, dann gilt $ra < rb$.

Zusatzaufgabe

1. Schreiben Sie mit Summen- und Produktzeichen:

    a) $1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36\,;$

    b) $\dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2} + 1 + 2 + 4 + 8\,;$

    c) $\dfrac{1}{4} + \dfrac{4}{9} + \dfrac{9}{16} + \dfrac{16}{25} + \dfrac{25}{36}\,;$

    d) $-\dfrac{1}{5 \cdot 6} + \dfrac{1}{7 \cdot 8} - \dfrac{1}{9 \cdot 10}\,;$

    e) $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n;$

    f) $1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 100\,;$

    g) $2 \cdot (-4) \cdot 6 \cdot (-8) \cdot \ldots \cdot 202\,;$

    h) $\left(1 - \dfrac{1}{3}\right)\left(1 + \dfrac{1}{6}\right)\left(1 - \dfrac{1}{10}\right)\left(1 + \dfrac{1}{15}\right)\left(1 - \dfrac{1}{21}\right)\left(1 + \dfrac{1}{28}\right).$