7. Übung zur Diskreten Mathematik

Aufgaben für den 17.11.2015

25. Sei $X \neq \emptyset$ eine endliche Menge und $x_0 \in X$. Gibt es mehr, (gleich viele, oder weniger) Teilmenge von X, die x_0 enthalten, als, (wie, als) Teilmengen von X, die x_0 nicht enthalten? Geben Sie einen kombinatorischen Beweis (d.h. mit bijektiven/surjektiven Funktionen).

26. Sei $n \in \mathbb{N}_+$ und

$$M_n = \left\{ \sum_{i=1}^{n} i! \cdot a_i \;\middle|\; a_i \in [\![0, i]\!],\ i \in [\![1, n]\!] \right\}.$$

Zeigen Sie, dass $M_n = [\![0, (n+1)! - 1]\!]$, und folgern Sie, dass jedes $x \in M_n$ eine eindeutige Darstellung in dieser Form besitzt.

27. Zeigen Sie, dass für die in 24 definierten Mengen Q_n und die Mengen M_n aus 26 gilt:

$$\bigcup_{n \geq 1} Q_n = \mathbb{Q} \cap [0, 1), \quad \text{und} \quad \bigcup_{n \geq 1} M_n = \mathbb{N}.$$

Beweisen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}_+$ die Abbildung $\varphi_n \colon M_n \to Q_n$, wobei für $x = \sum_{i=1}^{n} i! \cdot a_i$ der Funktionswert $\varphi_n(x)$ als $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{(i+1)!}$ definiert ist, eine Bijektion darstellt. Für $n \in \mathbb{N}_+$ und $x \in M_n$ zeigen Sie, $\varphi_{n+1}(x) = \varphi_n(x)$. Definieren Sie mit diesen Funktionen eine Bijektion ψ von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Q} \cap [0, 1)$ mit $\psi(x) = \varphi_n(x)$ für $x \in M_n$, $n \in \mathbb{N}_+$.

28. Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge, $I \neq \emptyset$ eine endliche Indexmenge, $A_i \subseteq X$ für $i \in I$. Zeigen Sie, dass $\chi_{\bigcap_{i \in I} A_i} = \prod_{i \in I} \chi_{A_i}$ und $\chi_{\bigcup_{i \in I} A_i} = 1 - \prod_{i \in I}(1 - \chi_{A_i})$. Sie dürfen verwenden, dass $X \setminus (\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcap_{i \in I}(X \setminus A_i)$.

Zusatzaufgabe

1. Fortsetzung von Aufgabe 22.
Die Universität besitzt abzählbar unendlich viele abzählbare Hörsäle. Da Professor Hilbert sehr angesehen ist, versammeln sich schließlich die Studierenden aus allen Hörsälen in seiner Vorlesung. Wie gelingt es ihm, allen StudentInnen einen Sitzplatz zuzuteilen?

   Am Ende der Vorlesung verteilt Prof. Hilbert stets Geschenke an die Studierenden. Diesmal hat er alle reellen Zahlen aus dem Intervall $[0, 1]$ mitgebracht. Einige Zeit nachdem er begonnen hat, die Zahlen an die Studierenden auszugeben, stellt er fest, dass er wahscheinlich zu viele Zahlen mitgebracht hat, und verschenkt sie in Bündeln zu 10, 100, 1000 Stück. Schließlich erkennt er aber, auch wenn er abzählbar unendlich viele Zahlen zu Päckchen zusammengefasst verschenkt, wird er nicht alle Zahlen verteilen. Wieso?

2. Zeigen Sie, dass die Abbildung $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{falls } x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{x-1} + 4 & \text{falls } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

bijektiv ist, und $f(\mathbb{Q} \cap (0,1)) = \mathbb{Q}$ gilt. Was erhält man mit der Abbildung $x \mapsto (f \circ \psi)(x)$, wobei ψ in 27 definiert wurde? Für welches $n \in \mathbb{N}$ ist $(f \circ \psi)(n) = 1/2$?