9. Übung zur Diskreten Mathematik

Aufgaben für den 1.12.2015

33. Sei $p \in \mathbb{P}$, $p > 2$. Zeigen Sie, dass 24 ein Teiler von $p^3 - p$ ist. (Ist das eine besondere Eigenschaft von Primzahlen?)

34. Die Menge M enthalte neun positive ganze Zahlen, die keine Primteiler größer als 5 enthalten. Zeigen Sie, dass es zwei verschiedene Zahlen in M gibt, deren Produkt ein Quadrat einer ganzen Zahl ist.

35. Beweisen Sie: Für $p \in \mathbb{P}$ und $a \in \mathbb{Z}$ gilt entweder $p \mid a$ oder $\mathrm{ggT}(p, a) = 1$.

36. Sei $D = \{3k + 1 \mid k \in \mathbb{N}_0\}$.
    (a) Zeigen Sie, dass die Multiplikation eine innere Verknüpfung auf D ist.
    (b) Eine Zahl $d \in D$ mit $d > 1$ heißt unzerlegbar in D, wenn aus $d = ab$ mit $a, b \in D$ folgt, dass $a = 1$ oder $b = 1$. Bestimmen Sie die ersten zehn unzerlegbaren Zahlen in D. Ist 100 in D zerlegbar oder unzerlegbar?
    (c) Zeigen Sie, dass jedes $d \in D$ als Produkt von in D unzerlegbaren Elementen geschrieben werden kann, und beweisen Sie, dass diese Darstellung i.a. nicht eindeutig ist.
    (d) Definiert man Teilbarkeit und die Primeigenschaft in D analog wie in $\mathbb{Z}$, dann zeigen Sie, dass 4 unzerlegbar aber nicht prim in D ist.

Zusatzaufgabe

1. Betrachten Sie die Funktion $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}$, $f(x) = x^2 + x + 41$, und berechnen Sie wie Werte $f(0), f(1), f(2), \ldots$? Was fällt Ihnen in Zusammenhang mit Primzahlen auf? Wann muß diese Funktion ihr Verhalten spätestens ändern?

2. Beweisen Sie: Es gibt unendlich viele Primzahlen der Form $3n + 2$, $n \in \mathbb{N}$.

   Hinweis: Verwenden Sie die Idee aus Euklids Beweis, und bilden Sie aus den bereits bekannten Primzahlen $p_1, \ldots, p_s$ von der gewünschten Form die Zahl $3p_1 \cdots p_s - 1$. Diese ist wieder von der Gestalt $3n + 2$, $n \in \mathbb{N}$. Leiten Sie daraus die Existenz einer weiteren von $p_1, \ldots, p_s$ verschiedenen Primzahl der Form $3n + 2$ her.