CLASON, FRIPERTINGER, KAINRATH UE 621.003, 646.835, 621.005, 646.804
BLATT 02 WS 2008/09

HÖHERE MATHEMATIK I

Hausaufgaben (Bearbeitung bis 21.10.2008)

H 2.1 *Realteil und Imaginärteil komplexer Zahlen*

Berechnen Sie

$$\Re\frac{1}{-2+3i}, \qquad \Im\frac{1-i}{2+5i}, \qquad \Re\left(3(2+i)^2-3i\right), \qquad \Im\frac{2+i}{3-4i}.$$

H 2.2 *Die Gaußsche Zahlenebene*

Skizzieren Sie folgende Punktmengen in der Gaußschen Zahlenebene:

$$A = \{z \in \mathbb{C} : |2z+1-2i| > 3\}, \qquad B = \{z \in \mathbb{C} : |-z-i-2| \leqslant 3\},$$
$$C = \{z \in \mathbb{C} : -2 \leqslant \Re z < 1, |\Im z| < 2\}, \qquad D = \{z \in \mathbb{C} : \Re((2+3i)(z-i)) = 0\}.$$

H 2.3 *Definition von Funktionen*

Gegeben seien die folgenden Zuordnungsvorschriften. Geben Sie jeweils den maximalen Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$ an, so dass $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion definiert. Bestimmen Sie auch jeweils das Bild $f(D)$.

$$f_1(x) = \frac{1}{x^2}, \quad f_2(x) = \sqrt{7-x} - 1, \quad f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}, \quad f_4(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}, \quad f_5(x) = x^2 - x - 6.$$

H 2.4 *Injektive, surjektive, bijektive Funktionen*

Begründen Sie, ob die folgenden Funktionen injektiv, surjektiv bzw. bijektiv sind:

(a) D ist die Menge der Namen der TeilnehmerInnen der Übung *Höhere Mathematik I*, W ist die Menge der Namen der Übungsleiter, $f : D \to W$ bildet den Namen der TeilnehmerIn auf den Namen des Leiters der besuchten Übungsgruppe ab,

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$,

(c) $f : \mathbb{R} \to (-1, 1)$, $f(x) = \frac{x}{|x|+1}$.

H 2.5 *Verkettung von Funktionen*

Bestimmen Sie jeweils für die folgenden Funktionen, ob die Verkettungen $g \circ f$ und $f \circ g$ definiert sind. Falls nicht, schränken Sie den Definitionsbereich so ein, dass die Verkettungen definiert sind. Untersuchen Sie auch, ob $g \circ f = f \circ g$ gilt.

(a) $f : (1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x-1}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - x - 5$

(b) $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x + 1$.

Freiwillige Trainingsbeispiele (werden von Tutoren korrigiert)

T 2.1 *Noch mal die Gaußsche Zahlenebene*

Skizzieren Sie folgende Punktmenge in der Gaußschen Zahlenebene: $A = \{z \in \mathbb{C} : z = \bar{z}\}$.

T 2.2 *Noch mehr Funktionsdefinitionen*

Welche der folgenden Funktionen sind identisch? Geben Sie eine Begründung an!

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x^2}, \qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = x, \qquad h : \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to \mathbb{R},\ h(x) = (\sqrt{x})^2.$$