

HÖHERE MATHEMATIK I

Hausaufgaben (Bearbeitung bis 2.120.2008)

H 7.1 *Gleichungen und Wurzeln*

Geben Sie alle Lösungen der folgenden Gleichungen an:

- (a)  $1 + \sqrt{x-3} = 3$ ,  
 (b)  $3 + \sqrt{x-2} = 2$ ,  
 (c)  $x = \sqrt{x+6}$ ,  
 (d)  $\sqrt{x-3} = \sqrt{2x-1}$ .

H 7.2 *Umformungen von Wurzeln, Potenzen und Logarithmen*

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke:

- (a)  $\sqrt{2ab^3} \sqrt[4]{8a^3b^2}$ ,  $a, b \geq 0$ ,  
 (b)  $\sqrt[3]{a\sqrt{a^3/a}}$ ,  $a \geq 0$ ,  
 (c)  $\ln \left( \frac{\sqrt[3]{a\sqrt{a^4}} \lim_{n \rightarrow \infty} (b + (-1)^n \frac{1}{n})}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 - (\frac{7}{9})^n}} \right) - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{5} e^{-\frac{5}{3}x} - \lim_{y \rightarrow 0} \left( \ln(y-a) + y \sin\left(\frac{1}{y}\right) \right)$ .

Welche Bedingungen müssen a und b erfüllen, dass obiger Ausdruck sinnvoll ist?

H 7.3 *Eine nützliche Gleichung*Zeigen Sie, dass für  $ab > 0$  gilt:

$$\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2}.$$

H 7.4 *Modellierung mit der Exponentialfunktion*

Erfahrungsgemäß wächst der Holzbestand eines bestimmten Waldstückes um 3.8% pro Jahr.

- (a) Nach wievielen Jahren wird er sich verdoppelt, nach wievielen Jahren verdreifacht haben?  
 (b) Heute beträgt der Holzbestand  $7200\text{m}^3$ . Man hat vor, in 3 Jahren  $2000\text{m}^3$  Holz zu schlägern. Wieviele Jahre nach der Schlägerung wird dieser Wald den heutigen Bestand wieder erreichen?

*Hinweis: Der Holzbestand  $H(t)$  zum Zeitpunkt  $t$  kann bestimmt werden als  $H(t) = H(0)e^{\lambda t}$  mit einer geeigneten Wachstumsrate  $\lambda$ .*H 7.5 *Parameterschätzung*

Gegeben sind die Daten

y	4.5	15.2	32.2	152.1	533.8	1930.1
x	3	15	21	35	50	62

Welcher funktionelle Zusammenhang  $y(x) = ax^b$  bzw.  $y(x) = ae^{bx}$  spiegelt die Daten besser wieder? Bestimmen Sie die Parameter a und b.*Bitte wenden!*

Freiwillige Trainingsbeispiele (werden von Tutoren korrigiert)

T 7.1 *Noch eine Modellierung mit der Exponentialfunktion*

Das Kohlenstoffisotop C-14 ist radioaktiv mit der Halbwertszeit von 5760 Jahren. Es kommt in der Atmosphäre sowie in lebenden Organismen vor, und sein Anteil bleibt konstant, solange die Organismen leben. Nach deren Tod verringert sich der Anteil entsprechend dem radioaktiven Zerfallsprozess.

- (a) Ein Tierskelett hat nur noch 10% des ursprünglichen C-14 Anteils. Wie alt ist das Skelett?
- (b) Auf welchen Betrag ist der C-14 Anteil nach 1000 bzw. 10000 Jahren gesunken?

*Hinweis: Sei  $C(t)$  die Menge von C-14 Isotopen zum Zeitpunkt  $t \geq 0$  (in Jahren), dann bestimmt man  $C(t)$  als  $C(0)e^{-\lambda t}$ . Dabei muß  $\lambda$  aus der Halbwertszeit bestimmt werden. Die Halbwertszeit gibt an, wie lange es dauert, bis sich die Anzahl der C-14 Isotope halbiert hat.*

T 7.2 *Nochmal Parameterschätzung*

Gegeben sind die Daten

y	30.0	64.5	74.5	86.7	94.5	98.9
x	4	18	29	51	73	90

Welcher funktionelle Zusammenhang  $y(x) = ax^b$  bzw.  $y(x) = ae^{bx}$  spiegelt die Daten besser wieder? Bestimmen Sie die Parameter a und b.