Proseminar Höhere Mathematik I – 3.Übungsblatt zur Übung am 9.11.2010

1. *Stetigkeit von Funktionen* Gegeben sei

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq 0 \\ 1 & , \quad x > 0 \end{cases} .$$

Untersuchen Sie f auf Stetigkeit an der Stelle $x = 0$ mittels Definition (ε-δ-Mimik).

2. *Verkettung von Funktionen* Bestimmen Sie jeweils für die folgenden Funktionen, ob die Verkettungen $g \circ f$ und $f \circ g$ definiert sind. Falls nicht, schränken Sie den Definitionsbereich so ein, dass die Verkettungen definiert sind. Untersuchen Sie auch, ob $g \circ f = f \circ g$ gilt.

   (a) $f : (1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x-1}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - x - 5$

   (b) $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x + 1$.

3. *Komposition von Abbildungen* Berechnen Sie die Kompositionen von Abbildungen und geben Sie deren Definitionsbereich an:

   (a) $f \circ f$ wobei $f \colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$, bzw. $f \colon \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/(x-1)$.

   (b) $f \circ g$, wobei $f \colon \mathbb{R}_{\leq 1/3} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{-3x+1}$, $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{(-x)^2+1}{3}$.

   (c) $f \circ f^{-1}$, wobei $f \colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x/(x^2 + 1)$.

   (d) $h \circ g \circ f$, wobei $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 1$, $g \colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \ln x$, $h \colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $h(x) = 1/x$.

4. *Injektivität usw.* Sei M die Menge der Mütter in Graz und K die Menge der Kinder von Grazer Müttern. Untersuchen Sie, ob die folgenden Zuordnungsvorschriftungen Funktionen sind:

   a) $x \to y$: $x \in M, y \in K$, x ist Mutter von y,

   b) $x \to y$: $x \in K, y \in M$, x ist Kind von y.

   Die Funktion(en) untersuchen Sie bitte noch auf Injektivität und Surjektivität.

5. Untersuchen Sie am Beispiel der Funktion $f(x) = \sin(x)$, ob diese als Abbildung $f : D \to Y$ aus dem Definitionsbereich D in den Bildraum Y injektiv, surjektiv oder bijektiv ist.

   a) $D = \mathbb{R},\ Y = \mathbb{R}$

   b) $D = [0, 2\pi],\ Y = [-1, 1]$

   c) $D = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}],\ Y = [-1, 1]$

   d) $D = [0, \frac{\pi}{2}],\ Y = \mathbb{R}$

   e) $D = (0, \frac{\pi}{2}),\ [0, 1)$

   f) $D = [0, \frac{\pi}{2}],\ [0, 1]$

6. *Umkehrfunktion* Die Funktion $g : [-3, 2] \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{3} & \text{für } x < 0 \\ x^2 & \text{für } x \geq 0 \end{cases} .$$

Skizzieren Sie den Funktionsgraphen von g und bestimmen Sie das Bild $g([-3, 2])$!
Besitzt g eine Umkehrfunktion? Wenn ja, geben Sie diese an!

Freiwillige Trainingsbeispiele (werden von Tutoren korrigiert)

7. *Nochmal Komposition* Seien $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ zwei Funktionen und $h : X \to Z$ ihre Komposition. Zeigen Sie:
   Wenn f und g bijektiv sind, dann ist auch h bijektiv.

8. Finden Sie je zwei Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : (0,1) \to \mathbb{R}$, die

   (a) injektiv, aber nicht surjektiv,

   (b) nicht injektiv, aber surjektiv,

   (c) weder injektiv noch surjektiv,

   (d) bijektiv

   sind.