Proseminar Höhere Mathematik I – 4.Übungsblatt zur Übung am 16.11.2010

1. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}\,,\qquad \text{(b)}\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x-5}{x^3-2x}\,.$$

2. Gegeben seien folgende lineare Abbildungen:

$$f_1:\mathbb{R}^5\to\mathbb{R}^3,\ f_1(x)=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\6&7&8&7&6\\5&4&3&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix},\qquad f_2:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^5,\ f_2(x)=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&2\\1&2&1\\1&-2&1\\2&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

Berechnen Sie:

(a) $f_1(x)$, $x=(1,0,2,-1,1)^T$ und $f_1(y)$, $y=(1,0,\frac{3}{2},0,\frac{1}{2})^T$,
(b) $f_2(x)$, $x=(1,2,3)^T$ und $f_2(y)$, $y=(-1,0,1)^T$.

Sind f_1 und f_2 injektiv?

3. Skizzieren Sie die Graphen der folgenden Funktionen und bestimmen Sie die Teilmengen des Definitionsbereichs, in denen sie monoton wachsen bzw. fallen:

(a) $f_1:\mathbb{R}_{\geq 0}\to\mathbb{R},\ f_1(x)=\sqrt{x}$,
(b) $f_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f_2(x)=\sqrt{x^2+x+1}$. Hinweis: Finden Sie $a,b>0$, so dass $f_2(x)=\sqrt{(x+a)^2+b}$.
(c) $f_3:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R},\ f_3(x)=\frac{2-x}{x-1}$,
(d) $f_4:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f_4(x)=\lfloor x\rfloor:=\max\{k\in\mathbb{Z}:\ k\leq x\}$ (d.h. die eindeutig bestimmte größte ganze Zahl kleiner oder gleich x).

4. Betrachten Sie die Funktion $\gamma:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ \gamma(x)=x-\lfloor x\rfloor$. Existiert ein $c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, so dass $\gamma(x+c)=\gamma(x)$ gilt?

5. Gegeben seien die beiden linearen Abbildungen

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3,\qquad f(x)=\begin{pmatrix}1&0\\2&-3\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},$$

$$g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2,\qquad g(x)=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}.$$

Finden Sie eine Matrix C, so dass $Cx=(f\circ g)(x)$ für alle $x\in\mathbb{R}^2$ gilt, sowie eine Matrix D, so dass $Dx=(g\circ f)(x)$ für alle $x\in\mathbb{R}^3$ gilt.

Freiwillige Trainingsbeispiele (werden von Tutoren korrigiert)

6. Berechnen Sie die Kompositionen $f\circ g$ und $g\circ f$ der folgenden Abbildungen und geben Sie deren Definitionsbereich an:

$$f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=-x+3,\ \text{und}\ g\colon(0,\infty)\to\mathbb{R}, g(x)=\ln(x).$$

7. Bestimmen Sie in welchen Intervallen die folgenden Funktionen monton steigend sind:

(a) $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\cos(x)$,
(b) $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$g(x)=\begin{cases}x^2 & \text{für } |x|\leq 1,\\ |x| & \text{für } x>1.\end{cases}$$