

Proseminar Höhere Mathematik I – 7.Übungsblatt zur Übung am 7.12.2010

1. Untersuchen Sie die angegebenen Folgen auf Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz:

$$2^n, \quad \frac{(-1)^n}{n}, \quad \frac{n-1}{n}, \quad \frac{2^n}{4^n+1}, \quad \left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

2. Untersuchen Sie, welche der angegebenen Folgen konvergiert, und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert:

$$\frac{n+1}{n^2}, \quad \frac{2^n}{n^2}, \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}, \quad \frac{n^n}{n^n + n - 6}, \quad \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n - \sqrt{n}},$$
$$\left(\frac{\sqrt[3]{n^3 + 25n^2 + 7n}}{n^6 + n + \frac{1}{n}}\right) \left\lfloor \frac{n}{n+1} \right\rfloor \sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}} + \left\lfloor \frac{n+1}{n} \right\rfloor.$$

3. Gibt es eine konvergente Folge (x_n) , die alle ganzen Zahlen als Werte annimmt?
4. Für $x \in D := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sei $f(x) := \sin(1/x)$. Verwenden Sie das Folgenkriterium, um zu zeigen, dass der Limes von $f(x)$ für x gegen 0 nicht existiert.

Hinweis: Bestimmen Sie die Mengen

$$M := \{x \in D \mid f(x) = 0\} \quad \text{und} \quad N := \{x \in D \mid f(x) = 1\}.$$

Konstruieren Sie Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \in M$, $y_n \in N$ für alle $n \in \mathbb{N}$, mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$. Die Nullstellen von $\sin x$ sind von der Form $k\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$. Für $y = (2k + \frac{1}{2})\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, gilt $\sin y = 1$.

5. Erfahrungsgemäß wächst der Holzbestand eines bestimmten Waldstückes um 3.8% pro Jahr.
- (a) Nach wievielen Jahren wird er sich verdoppelt, nach wievielen Jahren verdreifacht haben?
- (b) Heute beträgt der Holzbestand 7200m^3 . Man hat vor, in 3 Jahren 2000m^3 Holz zu schlägern. Wieviele Jahre nach der Schlägerung wird dieser Wald den heutigen Bestand wieder erreichen?

Hinweis: Der Holzbestand $H(t)$ zum Zeitpunkt t kann bestimmt werden als $H(t) = H(0)e^{\lambda t}$ mit einer geeigneten Wachstumsrate λ .

Freiwillige Trainingsbeispiele (werden vom Tutor korrigiert)

6. Untersuchen Sie die angegebenen Folgen auf Monotonie und Beschränktheit:

$$\frac{n^2}{n+1}, \quad \frac{n^2}{\sqrt{n^3+1}}, \quad \frac{(n+1)^2}{3^n}, \quad \sqrt{4 + \frac{1}{n}}.$$

7. Untersuchen Sie, welche der angegebenen Folgen konvergiert, und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert:

$$\frac{n+1}{n^2}, \quad \sqrt{n^2+n} - n, \quad \frac{3^{n+1}}{4^{n-1}}, \quad \frac{n!}{2^n}.$$