

## Proseminar Höhere Mathematik I – 7.Übungsblatt zur Übung am 7.12.2010

1. Untersuchen Sie die angegebenen Folgen auf Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz:

$$2^n, \quad \frac{(-1)^n}{n}, \quad \frac{n-1}{n}, \quad \frac{2^n}{4^n+1}, \quad \left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

2. Untersuchen Sie, welche der angegebenen Folgen konvergiert, und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert:

$$\frac{n+1}{n^2}, \quad \frac{2^n}{n^2}, \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}, \quad \frac{n^n}{n^n + n - 6}, \quad \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n - \sqrt{n}},$$
$$\left(\frac{\sqrt[3]{n^3 + 25n^2 + 7n}}{n^6 + n + \frac{1}{n}}\right) \left\lfloor \frac{n}{n+1} \right\rfloor \sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}} + \left\lfloor \frac{n+1}{n} \right\rfloor.$$

3. Gibt es eine konvergente Folge  $(x_n)$ , die alle ganzen Zahlen als Werte annimmt?
4. Für  $x \in D := \mathbb{R} \setminus \{0\}$  sei  $f(x) := \sin(1/x)$ . Verwenden Sie das Folgenkriterium, um zu zeigen, dass der Limes von  $f(x)$  für  $x$  gegen 0 nicht existiert.

*Hinweis:* Bestimmen Sie die Mengen

$$M := \{x \in D \mid f(x) = 0\} \quad \text{und} \quad N := \{x \in D \mid f(x) = 1\}.$$

Konstruieren Sie Folgen  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $x_n \in M$ ,  $y_n \in N$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ . Die Nullstellen von  $\sin x$  sind von der Form  $k\pi$  für  $k \in \mathbb{Z}$ . Für  $y = (2k + \frac{1}{2})\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , gilt  $\sin y = 1$ .

5. Erfahrungsgemäß wächst der Holzbestand eines bestimmten Waldstückes um 3.8% pro Jahr.
- (a) Nach wievielen Jahren wird er sich verdoppelt, nach wievielen Jahren verdreifacht haben?
- (b) Heute beträgt der Holzbestand  $7200\text{m}^3$ . Man hat vor, in 3 Jahren  $2000\text{m}^3$  Holz zu schlägern. Wieviele Jahre nach der Schlägerung wird dieser Wald den heutigen Bestand wieder erreichen?

*Hinweis:* Der Holzbestand  $H(t)$  zum Zeitpunkt  $t$  kann bestimmt werden als  $H(t) = H(0)e^{\lambda t}$  mit einer geeigneten Wachstumsrate  $\lambda$ .

### Freiwillige Trainingsbeispiele (werden vom Tutor korrigiert)

6. Untersuchen Sie die angegebenen Folgen auf Monotonie und Beschränktheit:

$$\frac{n^2}{n+1}, \quad \frac{n^2}{\sqrt{n^3+1}}, \quad \frac{(n+1)^2}{3^n}, \quad \sqrt{4 + \frac{1}{n}}.$$

7. Untersuchen Sie, welche der angegebenen Folgen konvergiert, und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert:

$$\frac{n+1}{n^2}, \quad \sqrt{n^2+n} - n, \quad \frac{3^{n+1}}{4^{n-1}}, \quad \frac{n!}{2^n}.$$