Proseminar Höhere Mathematik I – 9.Übungsblatt zur Übung am 11.1.2011

1. (a) Bestimmen Sie die Polarkoordinaten von $(7,0)$, $(0,-3)$ und $(-3,-4)$ an.
(b) Bestimmen Sie die kartesischen Koordinaten folgender Punkte in Polardarstellung (r,ϕ):

$$(1,\frac{\pi}{4}), \qquad (2,\frac{2\pi}{3}), \qquad (3,\frac{3\pi}{2}).$$

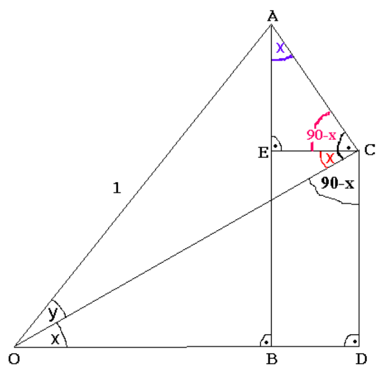
(c) Das Paar $(x,y)\in\mathbb{R}\setminus\{(0,0)\}$ besitze die Darstellung $(r\cos\phi, r\sin\phi)$. Drücken Sie $\phi\in(-\pi,\pi]$ als Formel in arccos, x, y und dem Vorzeichen von y aus. (Berücksichtigen Sie alle möglichen Vorzeichensituationen für x und y.)
(d) Stellen Sie die komplexen Zahlen $-1-\mathrm{i}\sqrt{3}$ und $-\sqrt{3}-\mathrm{i}$ in ihren Polarkoordinaten $r(\cos\phi+\mathrm{i}\sin\phi)$ dar, und rechnen Sie das Produkt dieser zwei Zahlen in der Polarkoordinatendarstellung aus.

2. Zeigen Sie:
(a) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, $x\in[-1,1]$. (Fallunterscheidung fur positive und negative x.)
(b) $\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}$, $x\in\mathbb{R}$.

3. Betrachten Sie $\sinh(x) := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, $\cosh(x) := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$. Zeigen Sie für alle $x,y\in\mathbb{R}$:

   (a) $\sinh(-x) = -\sinh(x)$,
   (b) $\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$,
   (c) $\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1$.

4. Seien $x,y\in[0,\pi/2]$ mit $x+y\le\pi/2$. Finden Sie einen graphischen Beweis für das Additionstheorem des Cosinus $\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$. (Grafik von *http://www.rinneberg.de/*)



5. Beweisen Sie mit Hilfe der Additionstheoreme:

$$\sin(\frac{\pi}{2}-\phi) = \cos\phi = \sin(\phi+\frac{\pi}{2}) = -\cos(\phi+\pi) = -\cos(\pi-\phi).$$

6. Unter Verwendung von $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ beweisen Sie, dass $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = 0$.
Hinweis: Erweitern Sie geschickt den gegeben Ausdruck.

Freiwillige Trainingsbeispiele (werden vom Tutor korrigiert)

7. Zeigen Sie für alle $x,y\in\mathbb{R}$:
(a) $\cosh(-x) = \cosh(x)$, (b) $\sinh(x+y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)$.

8. Beweisen Sie $\cos(2\phi) = \cos^2\phi - \sin^2\phi$.

9. Zeigen Sie, dass tan die Periode π hat. Bestimmen Sie eine Umkehrfunktion von tan mit Werten in $(\frac{5\pi}{2},\frac{7\pi}{2})$. Bestimmen Sie eine Umkehrfunktion von cos mit Werten in $[-\pi,0]$.