

1. Bestimmen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen:

$$\sqrt{x^3 + 1}, \quad \frac{1}{(x^4 + 3)^2}, \quad \frac{2x - 1}{(3x + 4)^5}, \quad \sin(3x) \cos(x), \quad \frac{\sin x}{x}, \quad x^4 e^x, \quad \log_{10} x.$$

2. (a) Bestimmen Sie die lokalen und globalen Extrema von $f : [-10, 10] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^5 - 5x^3$.
(b) Bestimmen Sie die lokalen und globalen Extrema von $g : [-10, 10] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^3 e^x$.
(c) Bestimmen Sie das Maximum von xy für alle $x, y \geq 0$ mit $x + y = 1$.
3. Eine Anwendung des Mittelwertsatzes: Zeigen Sie: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$|\cos x - \cos y| \leq |x - y|.$$

4. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte mit der Regel von L'Hôpital: ($a, b \in \mathbb{R}$)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \frac{x+1}{x-1}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax) - \sin(bx)}{x}.$$

5. Bestimmen Sie Symmetrie, Nullstellen, Extremwerte, Monotonie und Grenzwerte der Funktion und skizzieren Sie den Graphen.

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}.$$

Freiwillige Trainingsbeispiele (werden vom Tutor korrigiert)

6. Für ein Einfamilienhaus fallen im Jahr 1500 Euro Heizkosten an. Eine Isolierung der Wände durch eine zusätzliche Dämmschicht der Dicke x in cm, $x < 25$, würde die jährlichen Heizkosten auf $\frac{3000}{x+2}$ Euro senken, aber einmalig $450x$ Euro für die Installation erfordern. Bei welcher Dicke wären die Gesamtkosten (Installation und Heizung) über 10 Jahre minimal? Wie groß wäre dann die jährliche Ersparnis?
7. Bestimmen Sie Definitionsbereich D , Symmetrie, Nullstellen, Extremwerte, Wendepunkte, Monotonie, Krümmungsverhalten und Grenzwerte der Funktion

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - 1}.$$