CLASON, FRIPERTINGER, KAINRATH UE 621.011
BLATT 05 WS 2008/09

LINEARE ALGEBRA I

Hausaufgaben (Bearbeitung bis 5.11.2008)

H 5.1 *Dimension eines Unterraums*

Zeigen Sie, dass die Menge aller Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 + 3x_5 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + 6x_2 + 8x_3 + x_4 + 5x_5 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4 - x_5 &= 0 \end{aligned}$$

ein Unterraum von $\mathbb{R}^5$ ist, und bestimmen Sie dessen Dimension.

H 5.2 *Dimension des Abbildungsraums*

Sei A eine endliche Menge, und $\mathbb{K}^A$ der Vektorraum aller Abbildungen von A in den Körper $\mathbb{K}$. Was ist die Dimension von $\mathbb{K}^A$?

H 5.3 *Beispiele linearer Abbildungen*

Es seien $V_1 := (\mathbb{R}, +, \cdot)$ und $V_2 := (\mathbb{R}, \oplus, \odot)$ die Vektorräume aus H 2.5. Geben Sie je eine nichttriviale lineare Abbildung $T_1 : V_1 \to V_2$ und $T_2 : V_2 \to V_1$ an.

H 5.4 *Lineare Abbildungen und Unterräume*

Sei $T : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen zwei Vektorräumen V und W über dem (selben) Körper $\mathbb{K}$. Zeigen Sie, dass für einen beliebigen Unterraum U von W das Urbild

$$T^{-1}(U) := \{v \in V : \; Tv \in U\}$$

ein Unterraum von V ist.

H 5.5 *Kern und Spann*

Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $T : V \to \mathbb{K}$ eine lineare Abbildung mit Kern $\ker T \neq V$. Beweisen Sie, dass für jedes $v \notin \ker T$ gilt

$$V = \ker T \oplus \operatorname{span} v.$$

Hinweis: $\ker T = \operatorname{null} T = \{v \in V : \; Tv = 0\}$.

Freiwillige Trainingsbeispiele (werden von Tutoren korrigiert)

T 5.1 *Lineare Abbildungen und Dimension*

Sei V ein eindimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum. Zeigen Sie, dass für alle linearen Abbildungen $T : V \to V$ ein $\lambda \in \mathbb{K}$ existiert, so dass für alle $v \in V$ gilt: $Tv = \lambda v$.

T 5.2 *Dimension des Kerns einer linearen Abbildung*

Bestimmen Sie die Dimension des Kerns von

$$T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \; Tx = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ -1 & 6 & 4 & 9 \\ 5 & -12 & -2 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$