Clason, Fripertinger, Kainrath

UE 621.011

Blatt 10

WS 2008/09

Lineare Algebra I

Hausaufgaben (Bearbeitung bis 7.1.2009)

H 10.1 *Wiederholung: Rang einer Matrix (und Vorbereitung zur Eigenwertberechnung)*

Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{C}$, für die der Rang der Matrix A kleiner als 4 ist.

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 5-a & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 5-a & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 5-a & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 5-a \end{pmatrix} \quad .$$

(b)

$$A = \begin{pmatrix} -a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -a & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -a \end{pmatrix} \quad .$$

H 10.2 *Eindeutigkeit der Division mit Rest*

Seien $p, q \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$ zwei Polynome mit $p \neq 0$. Zeigen Sie, dass es eindeutig bestimmte Polynome s, r mit $\deg(r) < \deg(p)$ und $q = sp + r$ gibt.

H 10.3 *Division mit Rest*

Bestimmen Sie Polynome s, r mit

$$7X^6 + 5X^4 - 3X^3 + 2X^2 + X - 9 = (X^2 + X + 1)s + r$$

und $\deg(r) < 2$.

H 10.4 *Interpolation*

Seien $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n$ paarweise verschiedene Elemente von $\mathbb{K}$ und $y_1, \ldots, y_n$ beliebige Elemente von $\mathbb{K}$. Zeigen Sie, dass es genau ein Polynom p vom Grad $< n$ mit $p(x_i) = y_i$ für $i = 1, \ldots, n$ gibt.

H 10.5 *Eine *-Aufgabe*

Seien p und q komplexe Polynome. Zeigen Sie, dass p und q genau dann keine gemeinsame Nullstelle besitzen, wenn es Polynome r, s mit $1 = rp + sq$ gibt.

Freiwillige Trainingsbeispiele (werden von Tutoren korrigiert)

T 10.1 *Rang einer Matrix*

Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{C}$, für die die Matrix A vollen Rang besitzt.

$$A = \begin{pmatrix} 7-a & -7 & 5 \\ 6 & -10-a & 10 \\ 5 & -9 & 7-a \end{pmatrix} \quad .$$

T 10.2 *Division mit Rest*

Bestimmen Sie Polynome s, r mit

$$7X^6 + 5X^4 - 3X^3 + 2X^2 + X - 9 = (X^3 + 2X + 1)s + r$$

und $\deg(r) < 3$.