Lineare Algebra I, Übungen, Wintersemester 2008/09
1. Übungsblatt, für den 8.10.2008

1. Bestimmen Sie die gegenseitige Lage der beiden Geraden g und h und berechnen Sie gegebenenfalls deren Schnittpunkt. Geben Sie für jede dieser Geraden eine lineare Gleichung bzw. ein lineares Gleichungssystem an, dessen Lösungmenge genau aus den Punkten besteht, die auf der jeweiligen Geraden liegen.
   (a) $g := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$, $h := \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$,
   (b) $g := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$, $h := \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$,
   (c) $g := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$, $h := \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$.

2. Wiederholen Sie aus Ihrem Schulwissen oder aus Höherer Mathematik die Definition des Kreuzprodukts im $\mathbb{R}^3$ und zeigen Sie für $a, b, c \in \mathbb{R}^3$:
$$a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) = 0.$$

3. Gegeben seien die Gleichung
$$x + 2y + 3z = 4, \qquad x, y, z \in \mathbb{R}, \tag{1}$$
   und die Menge
$$g := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}.$$
   Was ist die geometrische Bedeutung der Lösungsmenge von (1)? Was ist die geometrische Interpretation von g? Bestimmen Sie den Schnittpunkt der beiden Mengen.

4. Gegeben seien folgende Funktionen:
   (a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$,
   (b) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a + 2b \\ 3a + 5b \\ 4a + 7b \end{pmatrix}$,
   (c) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = -a + 3b + 5$,
   (d) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = \sqrt[3]{a^3 + b^3}$.
   Für $r \in \mathbb{R}$ ist dabei $\sqrt[3]{-|r|}$ als $-\sqrt[3]{|r|}$ definiert. Welche dieser Abbildungen haben die folgenden Eigenschaften?
   (i) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ für alle x, y im Definitionsbereich von f.
   (ii) $f(rx) = rf(x)$ für alle $r \in \mathbb{R}$ und x im Definitionsbereich von f.

5. Lösen Sie folgendes Gleichungssystem im $\mathbb{R}^4$.
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= -2 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 10 \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 &= -7 \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 8x_4 &= 5. \end{aligned}$$

Freiwillig zu lösende Trainingsbeispiele, die von den Tutoren korrigiert werden.

T1. Beweisen Sie folgende Formeln für $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ und $r \in \mathbb{R}$.
$a \times b = -(b \times a)$
$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$
$(ra) \times b = r(a \times b) = a \times (rb)$ und $(ra) \times a = 0$
$a \times (b \times c) = \langle a, c \rangle b - \langle a, b \rangle c$, wobei $\langle (x_1, x_2, x_3)^\top, (y_1, y_2, y_3)^\top \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$.

T2. Hat das folgende Gleichungssystem eine Lösung in $\mathbb{R}^3$? Wenn ja, dann bestimmen Sie die genaue Lösungsmenge.
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 5x_3 &= 12 \\ 2x_1 - 6x_2 + 3x_3 &= -5 \\ x_1 - 5x_2 - 2x_3 &= -17. \end{aligned}$$