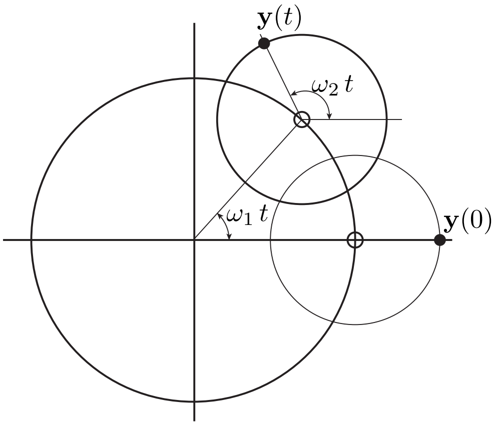
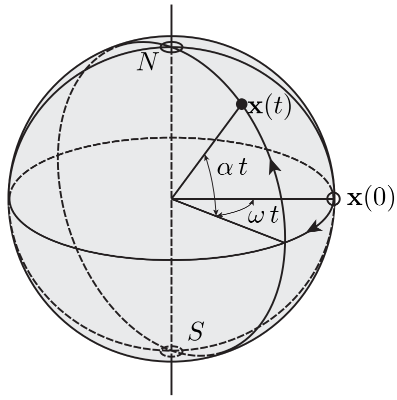
Höhere Mathematik III, Übungen, Wintersemester 2007
1. Übungsblatt, bis 8. 10. 2007

1. Finden sie alle Punkte mit horizontaler Tangente der folgenden — als Funktionsgraphen gegebenen — Kurven:
   (a) $f(x) = x^3 + \log(x^2 + 1)$, (b) $g(u) = (u - 1)^2 \, (u - 2)^3$.
   Welche der Punkte sind lokale Maxima oder Minima? Machen sie Skizzen der Graphen der Funktionen.
2. Bestimmen sie die folgenden bestimmten (z.T. uneigentlichen) Integrale:
   $$\int_1^e \log(x)\, dx, \qquad \int_3^\infty \frac{1}{(x-1)(x-2)}\, dx, \qquad \int_{-1}^1 s^{-\frac{2}{3}}\, ds.$$
3. Was läßt sich über das Monotonieverhalten der Funktion $g(z) = z - \log(1 + z)$ auf dem Intervall $(0, \infty)$ aussagen? Wie sieht es auf dem Intervall $(-1, 0)$ aus? Finden sie ein Argument, das zeigt, dass die Ungleichung $z > \log(1 + z)$ für $z > 0$ gilt.
4. Machen sie eine schematische Skizze einiger Niveaulinien der Funktion $e(x, y) = \frac{y^2}{2} + \cos x$, das heißt der Kurven $\frac{y^2}{2} + \cos x = \text{const}$ für einige Wert der Konstanten im Intervall $[-1, \infty)$. Versuchen sie durch die Skizze einen möglichst umfassenden Überblick über die geometrische Lage der unterschiedlichen Niveaulinien zu erhalten.

Die Übungsbeispiele dienen zur Vorbereitung auf die Übungseinheit am 8. 10. 2007. Ähnliche Beispiele werden in der Übungseinheit gerechnet.

1. In Polarkoordinaten sei die folgende Kurve gegeben:
   $$r = 2a\, \cos\phi + h$$
   mit gegebenen Zahlen $a, h > 0$. Fertigen sie Skizzen der Graphen der Kurven für die Wahl der Paramteter $a = 1$ und $h = 2,5$, $h = 2$ bzw. $h = 1,5$ an. Versuchen sie eine Tangente an die Kurve in jenem Kurvenpunkt zu bestimmen, der dem Ursprung am nächsten kommt. Ist das immer möglich? (Die Kurven, die durch die obige Familie von Parametrisierungen definiert sind, nennt man *Pascalsche Schnecken.* Für den Spezialfall $h = 2a$ heißt die Kurve *Kardioide*).
2. Finden sie eine Parametrisierung für die implizit gegebene Kurve $x_1^2 + 2\, x_2^2 = 3$. Um was für eine Art von Kurve handelt es sich? Bestimmen sie eine Gleichung der Tangente an die Kurve im Punkt $(1, -1)^t$.
3. Berechnen sie die Bogenlänge der Kurve
   $$t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t + t\, \sin t \\ \sin t - t\, \cos t \end{pmatrix}$$
   im Parameterbereich $t \in [0, 2\pi]$. (Die Kurve nennt man *Kreisevolvente*)
4. Bei einer Tanzfigur bewegt sich die Dame langsam im Kreis während der Herr die Dame umkreist. Beschreiben sie die Bewegung des Herrn unter den (idealisierten) Annahmen, dass Dame und Herr als Punkte in der Ebene modelliert werden können, wobei sich die Dame mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit ω_1 auf einer Kreisbahn mit Radius $r_1 = 2$ und der Herr sich auf einer Bahn mit konstantem Abstand $r_2 = 1$ zum aktuellen Aufenthaltspunkt der Dame bewegen. Die Winkelgeschwindigkeit des Herrn im Bezug auf den Ortspunkt der Dame ist konstant ω_2. (Siehe Abbildung)





(a) Wählen sie ein Koordinatensystem und eine konsistenten Anfangsposition für Tänzerin und Tänzer Finden sie eine Parametrisierung $\mathbf{y} : [0, \infty) \to \mathbb{R}^2$ für die Bewegungskurve des Herrn.

(b) Bestimmen sie den Geschwindigkeitsvektor des Herrn zu einem beliebigen Zeitpunkt $t \in [0, \infty)$. Berechnen sie die Geschwindigkeit für die konkrete Situation, dass $r_1 = 2$m, $r_1 = 1$m, und der Annahme, dass die Dame sich in 30 Sekunden einmal im Kreis dreht. In der gleichen Zeit wird sie vom Herrn dreimal umrundet. Die Geschwindigkeitsvektoren für die Zeitpunkte $t_1 = 5$sec, $t_2 = 10$sec und $t_3 = 22,5$sec sollen berechnet werden. Wie sieht jeweils der Absolutbetrag der Geschwindigkeitsvektoren aus?

(c) Finden sie (möglichst allgemeine) Bedingungen unter denen die Bahnkurve des Herrn sich schließt. Schließen bedeutet hier, dass sich sowohl der Herr als auch die Dame zu einem Zeitpunkt $T > 0$ in der gleichen Position befinden wie in der Ausgangsposition zur Zeit $t = 0$.

(d) Bestimmen sie die Länge der Bahnkurve zwischen dem Zeitpunkten 0 und t. Für die obige konkrete Angabe, bestimmen sie die Länge der Bahnkurve vom Zeitpunkt 0 bis zu jenem Zeitpunkt, wo sich die Bahnkurve des Herrn zum ersten Mal schließt.

5. Eine Kugel mit Radius r und Mittelpunkt im Ursprung eines dreidimensionalen rechtwinkeligen Koordinatensystems rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um die dritte (vertikale) Koordinatenachse. Die beiden Punkte, in denen die Drehachse die Kugel schneidet, nennen wir Nordpol (für $x_3 > 0$) und Südpol (für $x_3 < 0$. Auf der Kugel bewegt sich ein Punkt entlang eines mit-rotierenden Meridians (d.h. eines Kreises mit Mittelpunkt im Ursprung, der durch den Nord- und Südpol der Kugel verläuft) mit konstanter Winkelgeschwindigkeit α. (Siehe Skizze.)

   (a) Bestimmen sie die Parametrisierung $\mathbf{x} : [0, \infty) \to \mathbf{R}^3$ der Bahnkurve des Punktes, wenn sich der Punkt zur Zeit $t = 0$ im Punkt $(1, 0, 0)^t$ befindet und die Bewegung in nördliche Richtung startet.

   (b) Bestimmen sie die erste und zweite Ableitung $\mathbf{x}'$ und $\mathbf{x}''$ als Funktionen des Zeitparameters t. Zerlegen sie die zweite Ableitung $\mathbf{x}''$ zum Zeitpunkt t in eine Komponente, die normal auf die Kugeloberfläche im Punkt $\mathbf{x}(t)$ steht und in eine Komponente, die tangential zur Kugeloberfläche im Punkt $\mathbf{x}(t)$ verläuft.