Höhere Mathematik III, Übungen, Wintersemester 2007
5. Übungsblatt, vom 5. 11. 2007

Die Übungsbeispiele dienen zur Vorbereitung auf die folgenden Übungseinheiten, wo ähnliche Beispiele gerechnet werden.

1. Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich in $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$ der folgenden Funktionen:

a) $f(x,y,z) = \dfrac{x+y+z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ b) $f(x,y,z) = \dfrac{x+y+z}{\sqrt{x^2+y^2-z^2}}$ c) $f(x,y) = \dfrac{y}{\sqrt{x-y^2}}$

d) $f(x,y) = \sin\sqrt{x^2+y^2}$ e) $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$ f) $f(x,y) = \ln(x^2-y^2-1)$

g) $f(x,y) = \dfrac{1+\sin(xy)}{xy}$ h) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2-y^2}$ i) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x+y}} + \dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$

j) $f(x,y,z) = \ln(xyz)$ k) $f(x,y,z) = \sqrt{\ln(z^2-x^2-y^2-1)}$ l) $f(x,y) = \sqrt{x\sin y}$

2. Zeichnen Sie Niveaulinien von folgenden Funktionen:

a) $f(x,y) = x-y$ b) $f(x,y) = x^2-y^2$ c) $f(x,y) = y-x^2$

d) $f(x,y) = y-x^3$ e) $f(x,y) = y-\cos x$ f) $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$

g) $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$ h) $f(x,y) = x^2+y^2$ i) $f(x,y) = \sin\sqrt{x^2+y^2}$

j) $f(x,y) = \dfrac{1}{1+x^2+y^2}$

3. Bestimmen Sie die Richtungsableitung an die Funktion f im Punkt P in der Richtung von P nach Q.

a) $f(x,y) = x^2+4y^2$, $P=(3,1)$, $Q=(1,-1)$

b) $f(x,y) = \cos(x+y)$, $P=(0,\pi)$, $Q=(\pi/2,0)$

c) $f(x,y,z) = \ln(x+y+z)$, $P=(1,0,0)$, $Q=(4,3,1)$

d) $f(x,y,z) = xye^z$, $P=(2,4,0)$, $Q=(0,0,0)$

4. Bestimmen Sie alle partiellen Ableitungen 1. Ordnung von:

a) $f(x,y) = x-4y$ b) $f(x,y) = x^3y-y^3x$ c) $f(x,y) = \ln(x+\ln y)$

d) $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ e) $f(x,y,z) = x^{1/y}z$ f) $f(x,y) = (\sin x)^{\ln y}$

5. Sei $f(x,y) = \dfrac{2x^2y}{x^4+y^2}$.

a) Zeigen Sie, dass $f(x,y)$ gegen 0 strebt, falls (x,y) entlang einer beliebigen Geraden durch den Nullpunkt gegen $(0,0)$ strebt.

b) Zeigen Sie, dass $f(x,y)$ gegen 1 strebt, falls (x,y) entlang der Parabel $y=x^2$ gegen $(0,0)$ strebt.

c) Existiert der Grenzwert $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$?