Name: .... **Matrikelnr.:** ....

ÜBUNGEN ZUR HÖHEREN MATHEMATIK 3 WS 2007

2. Kurztest, 12. 11. 2007

Wir betrachten (wie im ersten Kurztest) die parametrisierte Kurve $\gamma : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\gamma(t) = (3\cos^3 t, 3\sin^3 t)$$

(1) Berechnen sie die Bogenlänge der Kurve. Hinweis: Beachten sie, dass die Kurve aus vier gleich langen Teilstücken besteht. Das kann die Berechnung vereinfachen.

(2) Berechnen sie für alle Kurvenpunkte wo das möglich ist die Krümmung der Kurve $\kappa(t)$. In welchen Kurvenpunkten existiert die Krümmung nicht?

Sei $a := 3$.

$$\gamma'(t) = (-3a\cos^2 t \sin t, 3a\sin^2 t\cos t)$$
$$\gamma''(t) = (6a\cos t\sin^2 t - 3a\cos^3 t, 6a\sin t\cos^2 t - 3a\sin^3 t)$$

Die Bogenlänge ist

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \sqrt{(-3a\cos^2 t\sin t)^2 + (3a\sin^2 t\cos t)^2}\, dt &= \int_0^{2\pi} \sqrt{9a^2\cos^2\sin^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t)}\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} 3a|\cos t\sin t|\, dt \\
&= 12a\int_0^{\pi/2} \cos t\sin t\, dt \\
&= 12a\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2t)}{2}\, dt \\
&= 3a\int_0^{\pi} \sin u\, du \\
&= 6a.
\end{aligned}$$

Die Krümmung kann bestimmt werden, falls $\gamma'(t) \neq 0$, also für $t \notin \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2\}$.

$$\begin{aligned}
\kappa(t) &= \frac{|(-3a\cos^2 t\sin t)(6a\sin t\cos^2 t - 3a\sin^3 t) - (6a\cos t\sin^2 t - 3a\cos^3 t)(3a\sin^2 t\cos t)|}{\big((-3a\cos^2 t\sin t)^2 + (3a\sin^2 t\cos t)^2\big)^{3/2}} \\
&= \frac{|-18a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\cos^2 t\sin^4 t - 18a^2\cos^2 t\sin^4 t + 9a^2\cos^4 t\sin^2 t|}{\big(9a^2\cos^2\sin^2 t\big)^{3/2}} \\
&= \frac{|-9a^2\cos^2 t\sin^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t)|}{\big(3a|\cos t\sin t|\big)^3} \\
&= \frac{3^2a^2\cos^2 t\sin^2 t}{3^3a^3|\cos^3 t\sin^3 t|} \\
&= \frac{1}{3a|\cos t\sin t|}.
\end{aligned}$$

Name: .... Matrikelnr.: ....

ÜBUNGEN ZUR HÖHEREN MATHEMATIK 3 WS 2007

2. Kurztest, 12. 11. 2007

Wir betrachten (wie im ersten Kurztest) die parametrisierte Kurve $\gamma : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\gamma(t) = (2\sin^3 t, 2\cos^3 t)$$

(1) Berechnen sie die Bogenlänge der Kurve. Hinweis: Beachten sie, dass die Kurve aus vier gleich langen Teilstücken besteht. Das kann die Berechnung vereinfachen.

(2) Berechnen sie für alle Kurvenpunkte wo das möglich ist die Krümmung der Kurve $\kappa(t)$. In welchen Kurvenpunkten existiert die Krümmung nicht?

Sei $a := 2$.

$$\gamma'(t) = (3a\sin^2 t\cos t, -3a\cos^2 t\sin t)$$

$$\gamma''(t) = (6a\sin t\cos^2 t - 3a\sin^3 t, 6a\cos t\sin^2 t - 3a\cos^3 t)$$

Die Bogenlänge ist

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \sqrt{(-3a\cos^2 t\sin t)^2 + (3a\sin^2 t\cos t)^2}\, dt &= \int_0^{2\pi} \sqrt{9a^2\cos^2\sin^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t)}\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} 3a|\cos t\sin t|\, dt \\
&= 12a\int_0^{\pi/2} \cos t\sin t\, dt \\
&= 12a\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2t)}{2}\, dt \\
&= 3a\int_0^{\pi} \sin u\, du \\
&= 6a.
\end{aligned}$$

Die Krümmung kann bestimmt werden, falls $\gamma'(t) \neq 0$, also für $t \notin \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2\}$.

$$\begin{aligned}
\kappa(t) &= \frac{|(-3a\cos^2 t\sin t)(6a\sin t\cos^2 t - 3a\sin^3 t) - (6a\cos t\sin^2 t - 3a\cos^3 t)(3a\sin^2 t\cos t)|}{\big((-3a\cos^2 t\sin t)^2 + (3a\sin^2 t\cos t)^2\big)^{3/2}} \\
&= \frac{|-18a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\cos^2 t\sin^4 t - 18a^2\cos^2 t\sin^4 t + 9a^2\cos^4 t\sin^2 t|}{\big(9a^2\cos^2\sin^2 t\big)^{3/2}} \\
&= \frac{|-9a^2\cos^2 t\sin^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t)|}{\big(3a|\cos t\sin t|\big)^3} \\
&= \frac{3^2a^2\cos^2 t\sin^2 t}{3^3a^3|\cos^3 t\sin^3 t|} \\
&= \frac{1}{3a|\cos t\sin t|}.
\end{aligned}$$