Name:.............................. **Matrikelnr.:**..............................

ÜBUNGEN ZUR HÖHEREN MATHEMATIK 3 WS 2007

3. Kurztest, 3. 12. 2007

(a) Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = e^{x^2-y^2}$ und der Punkt $P = (2, \sqrt{3})$. Bestimmen sie einen Vektor v ungleich 0, sodass die Richtungsableitung von f im Punkt P in Richtung $\mathbf{v}$ gleich Null ist.

Bestimmen sie eine Gleichung der Niveaulinie von f, die durch P verläuft und skizzieren sie diese. Um welche Art von Kurve handelt es sich?

(b) Bestimmen sie den Gradienten der Funktion $g(x,y) = \frac{x}{y}e^{\frac{y}{x}}$ für einen Punkt (x,y) mit $x \neq 0$ und $y \neq 0$.

(a)

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2xe^{x^2-y^2} \\ -2ye^{x^2-y^2} \end{pmatrix}$$

Da ∇f im Punkt P stetig ist, ist die Richtungsableitung von f im Punkt P in Richtung $\mathbf{v}$ dann und nur dann gleich null, wenn $\mathbf{v}$ orthogonal auf $\nabla f(P) = \begin{pmatrix} 4e \\ -2e\sqrt{3} \end{pmatrix}$ ist, also für $\mathbf{v}$ von der Form $\lambda \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Aus $f(P) = e$, bestimmen wir die Niveaulinie von f durch P als

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid e^{x^2-y^2} = e\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1\right\}.$$

Das ist ein Hyperbelast. Skizze fehlt!

(b) Sei $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $xy \neq 0$, dann ist

$$\nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{y}e^{y/x} + \frac{x}{y}(-\frac{y}{x^2})e^{y/x} \\ -\frac{x}{y^2}e^{y/x} + \frac{x}{y}\frac{1}{x}e^{y/x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\frac{1}{y} - \frac{1}{x})e^{y/x} \\ (1 - \frac{x}{y})\frac{1}{y}e^{y/x} \end{pmatrix}.$$

Name:............................. **Matrikelnr.:.............................**

ÜBUNGEN ZUR HÖHEREN MATHEMATIK 3 WS 2007

3. Kurztest, 3. 12. 2007

(a) Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = e^{y^2-x^2}$ und der Punkt $P = (\sqrt{3}, 2)$. Bestimmen sie einen Vektor v ungleich 0, sodass die Richtungsableitung von f im Punkt P in Richtung $\mathbf{v}$ gleich Null ist.

Bestimmen sie eine Gleichung der Niveaulinie von f, die durch P verläuft und skizzieren sie diese. Um welche Art von Kurve handelt es sich?

(b) Bestimmen sie den Gradienten der Funktion $g(x,y) = \frac{y}{x}e^{\frac{x}{y}}$ für einen Punkt (x,y) mit $x \neq 0$ und $y \neq 0$.

(a)

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} -2xe^{y^2-x^2} \\ 2ye^{y^2-x^2} \end{pmatrix}$$

Da ∇f im Punkt P stetig ist, ist die Richtungsableitung von f im Punkt P in Richtung $\mathbf{v}$ dann und nur dann gleich null, wenn $\mathbf{v}$ orthogonal auf $\nabla f(P) = \begin{pmatrix} -2e\sqrt{3} \\ 4e \end{pmatrix}$ ist, also für $\mathbf{v}$ von der Form $\lambda \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Aus $f(P) = e$, bestimmen wir die Niveaulinie von f durch P als

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid e^{y^2-x^2} = e\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - x^2 = 1\right\}.$$

Das ist ein Hyperbelast. Skizze fehlt!

(b) Sei $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $xy \neq 0$, dann ist

$$\nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2}e^{x/y} + \frac{y}{x}\frac{1}{y}e^{x/y} \\ \frac{1}{x}e^{x/y} + \frac{y}{x}(-\frac{x}{y^2})e^{x/y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-\frac{y}{x})\frac{1}{x}e^{x/y} \\ (\frac{1}{x} - \frac{1}{y})e^{x/y} \end{pmatrix}.$$