Eine Bemerkung zu den sich schließenden Kurven im 4. Beispiel der 1. Übungsblattes. Sei $x(t) = r_1\big(\cos(\omega_1 t), \sin(\omega_1 t)\big)$ die Bahn der Dame und $y(t) = r_1\big(\cos(\omega_1 t), \sin(\omega_1 t)\big) + r_2\big(\cos(\omega_2 t), \sin(\omega_2 t)\big)$ die Bahn des Herrn.

Ich möchte untersuchen, warum sich die Kurve y schließt, wenn es ein $T > 0$ gibt, so dass $x(T) = x(0)$ und $y(T) = y(0)$.

1. Falls es t_1 und t_2 gibt mit $0 < t_1 < t_2$ und $x(t_1) = x(t_2)$ und $y(t_1) = y(t_2)$, dann gilt $x(t_2 - t_1) = x(0)$ und $y(t_2 - t_1) = y(0)$.

   Wir rechnen zuerst mit der Kurve $f(t) = r(\cos(\omega t), \sin(\omega t))$. Aus $f(t_1) = f(t_2)$ folgt $\cos(\omega t_1) = \cos(\omega t_2)$ und $\sin(\omega t_1) = \sin(\omega t_2)$. Daher ist

$$
\begin{aligned}
f(t_2 - t_1) &= r(\cos(\omega(t_2 - t_1)), \sin(\omega(t_2 - t_1))) \\
&= r(\cos(\omega t_2)\cos(\omega t_1) + \sin(\omega t_2)\sin(\omega t_1), \sin(\omega t_2)\cos(\omega t_1) - \cos(\omega t_2)\sin(\omega t_1)) \\
&= r(\cos(\omega t_1)\cos(\omega t_1) + \sin(\omega t_1)\sin(\omega t_1), \sin(\omega t_1)\cos(\omega t_1) - \cos(\omega t_1)\sin(\omega t_1)) \\
&= r(\cos^2(\omega t_1) + \sin^2(\omega t_1), 0) \\
&= r(1, 0) \\
&= f(0).
\end{aligned}
$$

   Nun da $x(t)$ und auch die Differenz $x(t) - y(t)$ von der Form $f(t)$ ist, erhält man die Behauptung. Es genügt also ein T zu finden, so dass $x(T) = x(0)$ und $y(T) = y(0)$.

2. Sei $T > 0$. Falls $x(T) = x(0)$ und $y(T) = y(0)$, dann gilt $x(T + t) = x(t)$ und $y(T + t) = y(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

   Wir beweisen das wieder für die Funktion f. Sei also $f(T) = f(0)$.

$$
\begin{aligned}
f(T + t) &= r(\cos(\omega(T + t)), \sin(\omega(T + t))) \\
&= r(\cos(\omega T)\cos(\omega t) - \sin(\omega T)\sin(\omega t), \sin(\omega T)\cos(\omega t) + \cos(\omega T)\sin(\omega t)) \\
&= r(\cos(\omega 0)\cos(\omega t) + \sin(\omega 0)\sin(\omega t), \sin(\omega 0)\cos(\omega t) + \cos(\omega 0)\sin(\omega t)) \\
&= r(\cos(\omega t), \sin(\omega t)) \\
&= f(t).
\end{aligned}
$$

   Damit haben wir bewiesen, dass sich die Kurve wirklich schließt und nicht nur schneidet.

3. In der Übung haben wir gesehen, dass sich die Kurve y dann und nur dann schließt, wenn ω_1/ω_2 eine rationale Zahl ist. Für T kommen dann alle Werte $t > 0$ in Frage, für die $t\omega_1$ und $t\omega_2$ ganzzahlige Vielfache von 2π sind.

   Wir nehmen nun an, dass die Größen ω_1 und ω_2 bekannt sind. Sei $\omega_1/\omega_2 = k_1/k_2$ mit $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, $k_1 > 0$, $k_2 > 0$ und $\mathrm{ggT}(k_1, k_2) = 1$. Wie bestimmt man nun so ein T oder noch genauer: wie bestimmt man das $\min\{t \in \mathbb{R} \mid t > 0,\ t\omega_1$ und $t\omega_2$ sind ganzzahlige Vielfache von $2\pi\}$?

Es gibt ein $\omega \in \mathbb{R}$ so dass $\omega_1 = k_1\omega$ und $\omega_2 = k_2\omega$. Dann ist $\omega_1 t = k_1\omega t$ und $\omega_2 t = k_2\omega t$. Für $t_0 = 2\pi/\omega$ ist dann $\omega_1 t_0 = k_1 2\pi$ und $\omega_2 t_0 = k_2 2\pi$. Also sind $\omega_1 t_0$ und $\omega_2 t_0$ ganzzahlige Vielfache von 2π.

Nun behaupte ich dass für $0 < s < t_0$ stets $\omega_1 s$ oder $\omega_2 s$ nicht ein ganzzahliges Vielfaches von 2π ist. Angenommen es existiere ein s_0 mit $0 < s_0 < t_0$ so dass $\omega_1 s_0$ und $\omega_2 s_0$ ganzzahlige Vielfache von 2π sind, also $\omega_1 s_0 = \ell_1 2\pi$ und $\omega_2 s_0 = \ell_2 2\pi$. Dann ist $0 < \ell_1 < k_1$, $0 < \ell_2 < k_2$ und $\omega_1/\omega_2 = \ell_1/\ell_2$. Da auch $\omega_1/\omega_2 = k_1/k_2$ gilt, folgt $k_1/k_2 = \ell_1/\ell_2$, bzw. $k_1\ell_2 = \ell_1 k_2$. Aus der Teilerfremdheit von k_1 und k_2 leitet man dann her, dass k_1 ein Teiler von ℓ_1 und k_2 ein Teiler von ℓ_2 ist. Das ist ein Widerspruch zu $0 < \ell_i < k_i$, $i = 1, 2$. Also gibt es kein solches s_0, und t_0 ist der kleinste positive Parameter t, für den $t\omega_1$ und $t\omega_2$ ganzzahlige Vielfache von 2π sind.

Harald Fripertinger