Eine Bemerkung zur Berechnung des Mittelpunktes des Krümmungskreises in $\mathbb{R}^2$ als Antwort auf eine Frage von Frau Said.

Sei $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ eine zweimal differenzierbare Kurve. Falls im Punkt $\gamma(t)$ die Krümmung $\kappa(t)$ ungleich 0 ist, so kann der Mittelpunkt des Krümmungskreises in diesem Punkt bestimmt werden als

$$M(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \frac{x'(t)^2 + y'(t)^2}{x''(t)y'(t) - x'(t)y''(t)} \begin{pmatrix} y'(t) \\ -x'(t) \end{pmatrix}.$$

Beweis: Wir wissen, dass $M(t) = \gamma(t) + \kappa(t)^{-1}N(t)$, wobei $N(t)$ der Hauptnormalenvektor ist. Die Krümmung ist gegeben durch

$$\kappa(t) = \frac{|x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)|}{\big(x'(t)^2 + y'(t)^2\big)^{3/2}}.$$

Nach Voraussetzung ist $x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t) \neq 0$. Zur Berechnung von $N(t)$ benötigen wir

$$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = \frac{1}{\big(x'(t)^2 + y'(t)^2\big)^{1/2}} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}.$$

Die Berechnung von $N(t) = T'(t)/\|T'(t)\|$ ist komplizierter. Nach einiger Rechnung erhält man

$$T'(t) = \frac{1}{\big(x'(t)^2 + y'(t)^2\big)^{3/2}} \begin{pmatrix} y'(t)\big(x''(t)y'(t) - x'(t)y''(t)\big) \\ -x'(t)\big(x''(t)y'(t) - x'(t)y''(t)\big) \end{pmatrix}$$

und

$$\|T'(t)\| = \frac{|x''(t)y'(t) - x'(t)y''(t)|}{x'(t)^2 + y'(t)^2}$$

also

$$N(t) = \frac{1}{|x''(t)y'(t) - x'(t)y''(t)|\big(x'(t)^2 + y'(t)^2\big)^{1/2}} \begin{pmatrix} y'(t)\big(x''(t)y'(t) - x'(t)y''(t)\big) \\ -x'(t)\big(x''(t)y'(t) - x'(t)y''(t)\big) \end{pmatrix}.$$

Zusammenfassend ist

$$\begin{aligned} M(t) &= \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \frac{\big(x'(t)^2 + y'(t)^2\big)^{3/2}}{|x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)|}\, N(t) \\ &= \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \frac{x'(t)^2 + y'(t)^2}{\big(x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)\big)^2} \begin{pmatrix} y'(t)\big(x''(t)y'(t) - x'(t)y''(t)\big) \\ -x'(t)\big(x''(t)y'(t) - x'(t)y''(t)\big) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \frac{x'(t)^2 + y'(t)^2}{x''(t)y'(t) - x'(t)y''(t)} \begin{pmatrix} y'(t) \\ -x'(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Harald Fripertinger