Konstruktionsmethoden für Iterationsgruppen in Potenzreihenringen

Ludwig Reich (Universität Graz)

1. Einleitung

Motivation: Einbettungsproblem aus der analytischen Mechanik; geom. Funktionentheorie

$\mathcal{U} \subset \mathbb{C}^n$ $(n \geq 1)$ Gebiet, $0 = (0, \ldots 0) \in \mathcal{U}$

$\tilde{F} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ biholomorph, $\tilde{F}(0) = 0$, gegeben

gesucht $(F_t)_{t \in \mathbb{C}}$, $F_t : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ biholomorph

$F_t(0) = 0$ $(t \in \mathbb{C})$, so dass

$$F_1 = \tilde{F}$$

$$F_t \circ F_s = F_{t+s} \quad , \quad s, t \in \mathbb{C} \quad (T)$$

$\Big[\underset{\in \mathbb{C} \times \mathcal{U}}{(t, x)} \longmapsto \underset{\in \mathcal{U}}{F_t(x)}$ biholomorph $\Big]$

$(F_t)_{t \in \mathbb{C}}$ Fluss; einparametrige Gruppe; Iterationsgruppe; Einbettung von $\tilde{F}$

(T) Translationsgleichung

$\mathbb{C}[\![X]\!]$ Ring der formalen Potenzreihen in X über $\mathbb{C}$, $F(X) = c_0 + c_1 X + \dots$

$(\mathbb{C}[\![X]\!], +, \cdot, \circ)$ $\circ$ Substitution

$F, G \in \mathbb{C}[\![X]\!]$, $\operatorname{ord} G \geq 1 \Rightarrow (F \circ G)(X) = F(G(X))$ definiert

$(\Gamma, \circ)$ Gruppe der bezüglich $\circ$ invertierbaren Potenzreihen

$\Gamma = \{ F \mid F \in \mathbb{C}[\![X]\!],\ F(X) = c_1 X + \dots,\ c_1 \neq 0 \}$

$= \{ F \mid F \in \mathbb{C}[\![X]\!],\ \operatorname{ord} F = 1 \}$

Γ_1 $\quad \Gamma_1 = \{ F \mid F \in \Gamma,\ F(X) = 1 \cdot X + \dots \}$

$(\Gamma_1, \circ) < (\Gamma, \circ)$

$\mathbb{C}[\![Y, X]\!]$, $\mathbb{C}[\![Y, Z, X]\!]$

$(\mathbb{C}[Y])[\![X]\!] < \mathbb{C}[\![Y, X]\!]$

$F(x) \in \mathbb{C}[\![x]\!]$, $F(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu x^\nu$

$\Rightarrow F'(x) = \frac{\partial F}{\partial x}(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1) c_{\nu+1} x^\nu$

$\frac{\partial}{\partial x}$ Derivation über $\mathbb{C}$

In $\mathbb{C}[\![y, x]\!]$, $\mathbb{C}[\![y, z, x]\!]$:

$\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$

Kettenregel:

$F, G \in \mathbb{C}[\![x]\!]$, $\operatorname{ord} G \geq 1 \Rightarrow F(G(x)) \in \mathbb{C}[\![x]\!]$ erklärt, $(F \circ G)'(x) = F'(G(x)) \cdot G'(x)$

In $\mathbb{C}[\![y, x]\!]$ etc: „gemischte" Kettenregeln

Iterationsgruppen (ein-parametrige Gruppen) in $\mathbb{C}[\![x]\!]$

$(F_t)_{t \in \mathbb{C}}$, $F_t \in \Gamma$, $\forall t \in \mathbb{C}$

$F_{t+s} = F_t \circ F_s$, $\forall t, s \in \mathbb{C}$ (T)

(T) Translationsgleichung

$$F_t(x) = F(t, x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu(t) x^\nu, \quad t \in \mathbb{C}$$

$$(T) \Leftrightarrow \quad F(t+s, x) = F(t, F(s, x)), \quad t, s \in \mathbb{C}.$$

$$\Rightarrow \quad F_0(x) = x, \quad F_{-t}(x) = F_t^{-1}(x)$$

Einparametrige Untergruppen als Homomorphismen

$\theta : (\mathbb{C}, +) \longrightarrow (\Gamma, \circ)$ Homomorphismus

$$\Leftrightarrow \quad \theta(t) = F_t \in \Gamma$$

$$F_{t+s} = F_s \circ F_t \qquad , (T)$$
$$s, t \in \mathbb{C}$$

[Allgemeiner (W. Jabłoński; L. R)

$\theta : (G, +) \to (\Gamma, \circ)$,

wo $(G, +)$ eine beliebige abelsche Gruppe ist.]

I. a ist $(G, +)$ schwieriger als $(\mathbb{C}, +)$.

Konjugation von Iterationsgruppen

$(F_t)_{t\in\mathbb{C}}$ Iterationsgruppe, $S\in\Gamma \Rightarrow$

$(S^{-1}\circ F_t\circ S)_{t\in\mathbb{C}}$ Iterationsgruppe

$(F_t)_{t\in\mathbb{C}}$, $(G_t)_{t\in\mathbb{C}}$ Iterationsgruppen

$(F_t)_{t\in\mathbb{C}}$ und $(G_t)_{t\in\mathbb{C}}$ konjugiert,
falls existiert $S\in\Gamma$ so dass $G_t = S^{-1}\circ F_t\circ S$,
$\forall t\in\mathbb{C}$.

Probleme

1) "Konstruktion" aller Iterationsgruppen in Γ

2) Möglichst explizite Beschreibung der Koeffizientenfunktionen $c_\nu : \mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $\nu\geq 1$.
($F_t(x) = c_1(t)\,x + c_2(t)\,x^2 + \ldots$)

3) Struktur der Iterationsgruppen, Normalformen gegenüber Konjugation

Die Konstruktion der Iterationsgruppen und die Beschreibung ihrer Struktur hängt eng zusammen mit der Bestimmung der maximalen abelschen Untergruppen von $(\Gamma, \circ)$.

Regularitätsforderungen an die Koeffizientenfunktionen

$(F_t)_{t \in \mathbb{C}}$ analytische (bzw. kontinuierliche) Iterationsgruppe, falls alle Koeffizientenfunktionen c_ν ganz (bzw. stetig) sind

Die Konstruktion der analytischen Iterationsgruppen kann bei der Iterationsgruppen Konstruktion der Iterationsgruppen ohne Regularitätsbedingung verwendet werden.

Erste Klassifikation der Iterationsgruppen

$(F_t)_{t\in\mathbb{C}}$ Iterationsgruppe,
$F_t(x) = c_1(t)x + c_2(t)x^2 + \dots$, $t \in \mathbb{C}$

a) $F_t(x) = x$, $\forall t \in \mathbb{C}$
(triviale Iterationsgruppe)

b) $c_1 \neq 1$
$\Rightarrow c_1(t+s) = c_1(t)c_1(s)$, $s,t \in \mathbb{C}$
c_1 verallgemeinerte Exponentialfunktion, $c_1 \neq 1$
(F_t) Iterationsgruppe vom Typ I

c) $c_1 = 1$, $\exists k \geq 2$, so dass $c_2 = \dots c_{k-1} = 0$,
$c_k \neq 0$
$\Rightarrow c_k(t+s) = c_k(t) + c_k(s)$, $t, s \in \mathbb{C}$
c_k additive Funktion, $c_k \neq 0$
$(F_t)_{t\in\mathbb{C}}$ Iterationsgruppe vom Typ (II, k)

Diese Klassifikation ist verträglich mit der Konjugation der Iterationsgruppen

Die Funktionalgleichungssysteme für die Koeffizientenfunktionen

1) $(F_t)_{t\in\mathbb{C}}$ Iterationsgruppe vom Typ I,
$F_t(x) = c_1(t)X + c_2(t)X^2 + \ldots, t \in \mathbb{C}$

$\Longleftrightarrow$ $(c_1 \not\equiv 1)$

$$c_1(s+t) = c_1(s)\,c_1(t)$$
$$c_2(s+t) = c_1(s)\,c_2(t) + c_2(s)\,c_1(t)^2 \qquad (FE, I)$$
$$c_n(s+t) = c_1(s)\,c_n(t) + c_n(s)\,c_1(t)^n + \tilde{P}_n(c_2(s), \ldots, c_{n-1}(s); c_2(t), \ldots c_{n-1}(t)) \quad (n \geq 1)$$

für alle $s, t \in \mathbb{C}$.
$\tilde{P}_n$ universelle Polynome, linear in $c_2(s), \ldots, c_{n-1}(s)$

$\mathrm{Im}(c_1)$ unendlich. $Q(X,Y) \in \mathbb{C}[X,Y]$;
$Q(c_1(s), c_1(t)) = 0, \forall s,t \in \mathbb{C} \Rightarrow Q = 0$

$\exists\, t_2 \in \mathbb{C}$, so dass $c_1(t_2)^2 - c_1(t_2) \neq 0$,

allgemein $\exists\, t_n \in \mathbb{C}$, so dass $c_1(t_n)^n - c_1(t_n) \neq 0$

$$c_2(s+t) = c_2(t+s), \forall s,t \in \mathbb{C}$$

rechte Seite von (FE, I)

$\Rightarrow$

$$c_2(s) = \frac{c_1(t_2)}{c_1(t_2)-c_1(t_2)^2}\, c_1(s) - \frac{c_2(t_2)}{c_1(t_2)-c_1(t_2)^2}\, c_1(s)^2$$

$\Rightarrow$ $c_2(s) = P_2(c_1(s))$ mit einem Polynom P_2 über $\mathbb{C}$

Vollst. Induktion (u. $c_n(s+t) = c_n(t+s)$):

<u>Bem</u> <u>Vor</u> $(F_t)_{t\in\mathbb{C}}$ Iterationsgruppe vom Typ I,

$F_t(X) = c_1(t)X + c_2(t)X^2 + \ldots, t \in \mathbb{C}$

<u>Beh</u> $\exists$ Folge von Polynomen $(P_n)_{n\geq 2}$ (zu $(F_t)_{t\in\mathbb{C}}$), so dass

$$c_n(s) = P_n(c_1(s)), \quad \forall s \in \mathbb{C}, n \geq 2.$$

Einsetzen in (FE, I)

$\Rightarrow$

$$\underline{P_n(G_1(s)\cdot G_1(t))} = \cancel{P_n\,(G_1(s)\cdot G_1(t))}$$

$$= P_n(G_1(s+t)) = c_n(s+t) = \qquad (\hat{P}\,\mathrm{I})$$

$$= \underline{G_1(s)\,P_n(G_1(t)) + P_n(G_1(s))\,G_1(t)^n} +$$

$$\underline{+\,\tilde{P}_n\left(P_2(G_1(s)),\dots,P_{n-1}(G_1(s));\ P_2(G_1(t)),\dots,P_{n-1}(G_1(t))\right)}$$

$n \geq 2, \quad t, s \in \mathbb{C}$

2) Iterationsgruppen vom Typ (II, k)

$$F_t(x) = X + c_k(t)X^k + \dots \qquad , t \in \mathbb{C}$$

$$(k \geq 2)$$

$c_k : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ additiv, $c_k \neq 0$

$$[1] \begin{cases} c_k(s+t) = c_k(s) + c_k(t) \\ \vdots \\ c_{2k-2}(s+t) = c_{2k-2}(s) + c_{2k-2}(t) \\ c_{2k-1}(s+t) = c_{2k-1}(t) + c_{2k-1}(s) + k\,c_k(s)c_k(t) \end{cases} \quad (FE, (\mathrm{II}, k))$$

$$\vdots$$

(ν)
$n = \nu k, \dots, (\nu+1)k-1$

$$\begin{aligned} c_n(s+t) = {} & c_n(t) + c_n(s) + k\,c_k(s)\,c_{n-(k-1)}(t) \\ & + (n-(k-1))\,c_{n-(k-1)}(s)\,c_k(t) \\ & + \tilde{P}_n\left(c_k(s),\dots c_{n-k}(s), c_k(t),\dots, c_{n-k}(t)\right) \end{aligned}$$

$$\dots$$

12

$\exists t_0$, so dass $c_k(t_0) \neq 0$

Gleichung für c_{2k}, $c_{2k}(s+t) = c_{2k}(t+s)$

$\Rightarrow \quad c_{k+1}(s) = \frac{c_{k+1}(t_0)}{c_k(t_0)} c_k(s) = P_{k+1}(c_k(s))$, $\forall s \in \mathbb{C}$

P_{k+1} Polynom

Vollst. Induktion: Angenommen, $\exists$ Polynome P_ℓ, $\ell < n$, so dass $c_\ell(t) = P_\ell(c_k(t))$, $t \in \mathbb{C}$

Gleichung für c_{n+k-1}, $c_{n+k-1}(s+t) = c_{n+k-1}(t+s) \Rightarrow$

$c_n(s) = P_n(c_k(s))$, P_n Polynom

$$\left[\, c_n(s) = \frac{c_n(t_0)}{c_k(t_0)} c_k(s) + \frac{1}{(n-k)\, c_k(t_0)} \cdot \tilde{P}_{n+k-1}(c_k(t_0), \ldots P_{n-1}(c_k(t_0)); c_k(s) \ldots, P_{n-1}(c_k(s)) \,\right]$$

Bem **Vor** $(F_t)_{t\in\mathbb{C}}$ Iterationsgruppe vom Typ (II,k), $F_t(X) = X + c_k(t)X^k + \dots$

Bh. Zu $(F_t)_{t\in\mathbb{C}}$ ex. Folge $(P_n)_{n\geq k+1}$ von Polynomen, so dass

$$F_t(X) = X + c_k(t)X^k + \sum_{n\geq k+1} P_n(c_k(t))X^n, \quad t\in\mathbb{C}$$

c_k additiv, $c_k \neq 0$.

$\Downarrow$

Bew FE, (II, k)

$$\underline{P_n(c_k(s)+c_k(t))} = P_n(c_k(s+t)) = c_n(s+t) \overset{(FE,(\mathrm{II},k))}{=}$$

$$= P_n(c_k(t)) + P_n(c_k(s)) + k\,c_k(s)\,P_{n-(k-1)}(c_k(t)) + (n-(k-1))\,P_{n-(k-1)}(c_k(s))\,c_k(t) + \tilde{P}_n(c_k(s),\dots,P_{n-k}(c_k(s));\ c_k(t),\dots,P_{n-k}(c_k(t))) \quad (P\mathrm{II})$$

$n \geq k+1$

2. Formale Funktionalgleichungen

H. F., L. R. D. Gronau

L. R (P. Dörfler)

I) Iterationsgruppen vom Typ I

$t \in \mathbb{C}$

$F_t(x) = a_1(t) X + \cdots$

$a_1(s+t) = a_1(t) \cdot a_1(s), \quad a_1 \neq 1, 0$

$(\hat{P}, I) \Rightarrow$

$P_n(Y.Z) = Y P_n(Z) + P_n(y) Z^n +$

$+ \tilde{P}_n(P_2(y), \ldots P_{n-1}(y); P_2(Z), \ldots P_{n-1}(Z))$

(P, I)

in $\mathbb{C}[Y, Z]$, $n \geq 2$

$G(y, x) := Y X + \sum_{n \geq 2} P_n(y) X^n \in (\mathbb{C}[y])[[X]]$

$\overset{(P,I)}{\Longrightarrow} \quad G(YZ, X) = G(Y, G(Z, X))$

in $(\mathbb{C}[Y, Z])[[X]]$ (T form. I)

Formale Translationsgleichung vom Typ I,

$G(1,X) = X$ $\qquad$ (B I)

$G(y,X)$ formale Iterationsgruppe vom Typ I

II) Iterationsgruppen vom Typ (II, k)

$F_t(X) = X + c_k(t)X^k + \dots$ $\qquad t \in \mathbb{C}$

$k \geq 2$, $\quad c_k \neq 0 \qquad c_k(s+t) = c_k(s) + c_k(t)$

$\mathrm{Im}(c_k)$ unendlich;

$Q[x,y] \in \mathbb{C}[x,y]$, $\quad Q(c_k(s), c_k(t)) = 0, \ \forall s,t$

$\Rightarrow Q = 0 \qquad c_n(t) = P_n(c_k(t)), \ t \in \mathbb{C}, \ n \geq k$

$(\hat{P}, \mathrm{II}) \Rightarrow$ $\qquad$ (P, II)

$$P_n(y+z) = P_n(y) + P_n(z) + k\,y\,P_{n-(k-1)}(z) + (n-(k-1))\,P_{n-(k-1)}(y)\cdot z + \tilde{P}_n(y, \dots, P_{n-k}(y); z, \dots P_{n-k}(z))$$

$n \geq k+1$

$$G(y,X) := X + yX^k + \sum_{n \geq k+1} P_n(y) X^n \in (\mathbb{C}[y])[[X]]$$

(P, II)

$$\Rightarrow \quad G(y+z, X) = G(y, G(z,X)) \quad (T_{form}, (\mathrm{II},k))$$

$$G(0,X) = X$$

Formale Translationsgleichung vom (Typ II)

$G(y,x)$ formale Iterationsgruppe vom Typ (II,k)

<u>Umkehrung</u>

a) $G(y,x)$ formale Iterationsgruppe vom Typ I, c_1 verallgemeinerte Exponentialfunktion, $c_1 \neq 1 \Rightarrow (G(c_1(t),X))_{t\in\mathbb{C}}$ ist Iterationsgruppe vom Typ I

b) $G(y,x)$ formale Iterationsgruppe vom Typ (II,k), $c_k \neq 0$, additiv $\Rightarrow$ $(G(c_k(t),X))_{t\in\mathbb{C}}$ Iterationsgruppe vom Typ (II,k).

Lösung der formalen Translationsgleichungen durch (rein algebraische) Differentiationsprozesse in $(\mathbb{C}[y])[[x]]$, $(\mathbb{C}[y,z])[[x]]$

(T form, I)

$G(y,x) \in (\mathbb{C}[y])[[x]]$ formale Iterationsgruppe vom Typ I

$$G(yz;x) = G(y, G(z,x)), \quad G(1,x) = x$$

$$\frac{\partial}{\partial y} G(y,x)\Big|_{y=1} = x + \sum_{n\geq 2} h_n x^n =: H(x)$$

infinitesimaler Generator von $G(y,x)$

a) Differentiation von (T form, I) nach y, $y=1$

$$z \frac{\partial G}{\partial z}(z,x) = H(G(z,x)) \quad (\text{D form}, \text{I})$$

$$G(1,x) = x$$

b) Differentiation von (T form, I) nach z, Kettenregel, „z = 1"

$$y \frac{\partial G}{\partial y}(y,X) = H(X) \frac{\partial G}{\partial x}(y,X) \quad \text{(PD form, I)}$$

$$G(1,X) = X$$

Keine Substitution der Unbekannten $G(y,x)$ erforderlich

c) a) + b)

$$H(x) \frac{\partial}{\partial x} G(y,x) = H(G(y,x)) \quad \text{(AJ form I)}$$

$$G(y,x) = yX + \ldots$$

$$G(1,X) = X$$

'y tritt nicht explizit in (AJ form, I) auf

(y interner Parameter)

Aczél-Jabotinskysche Differentialgleichung

$(T_{form}, (\mathrm{II}, k))$

$$G(y,x) = X + yX^k + \sum_{n\geq k+1} P_n(y) X^n \in (\mathbb{C}[y])[[x]]$$

formale Iterationsgruppe vom Typ (II, k)

$$G(y+z,x) = G(y, G(z,x)) \quad (T_{form}, \mathrm{II})$$
$$G(0,x) = X$$

a) Differentiation von (T_{form}, II) nach y,
"$y=0$"

$$\frac{\partial}{\partial z} G(z,x) = H(G(z,x)) \quad (D_{form}, \mathrm{II})$$
$$G(0,x) = x$$

mit $H(x) := \frac{\partial}{\partial y} G(y,x)\Big|_{y=0} = X^k + \sum_{n\geq k+1} h_n X^n$

H infinitesimaler ~~Charakter~~ Generator von $G(y,x)$]

b) Differentiation nach z, Kettenregel,
"$z=0$"

$$\frac{\partial}{\partial y} G(y,x) = H(x) G(y,x) \quad (\mathcal{PD}_{form}, \mathrm{II})$$
$$G(0,x) = x$$

c) $H(x)\frac{\partial}{\partial x}G(y,x) \neq H(G(y,x))$

(AJ form)

Weitere Verzweigung

$$G(y,x) = \sum_{n\geq 1} P_n(y)x^n \in (\mathbb{C}[y])[[x]]$$

$$\subset \mathbb{C}[[y,x]]$$

$$= \sum_{n\geq 0} \phi_n(x)y^n \in (\mathbb{C}[[x]])[[y]]$$

$(\phi_n(x))_{n\geq 1}$ summierbare Familie

$\Rightarrow$ $\sum_n \phi_n(x) = X$ sinnvoll

(bei Iterationsgruppen vom Typ I)

3. Formale Iterationsgruppen vom Typ I

$$G(y,X) = yX + \sum_{n\geq 2} P_n(y) X^n$$

(PD form, I)

$$\begin{cases} y \dfrac{\partial G}{\partial y}(y,X) = H(X) \dfrac{\partial G}{\partial X}(y,X) \\ G(1,X) = X \end{cases}$$

A) Zu gegebenem Generator $H(X) = X + h_2 X^2 + \ldots$ hat (PD form, I) + $G(1,X) = X$ genau eine Lösung $G(y,X) = yX + \sum_{n=2}^{\infty} P_n(y) X^n \in (\mathbb{C}[y])[[X]]$.

Es gilt

$$P_n(y) = \frac{h_n}{n-1}(y^n - y) + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\Phi_j^{(n)}(h_2, \ldots h_{n-1})}{n-j}(y^n - y^j)$$

mit Polynomen $\Phi_j^{(n)}$, $1 \leq j \leq n-1$. Diese ergeben sich (rekursiv) aus

$$\sum_{r=2}^{n-1} h_r (n-r+1) P_{n-r+1}(y) = \sum_{j=1}^{n-1} \Phi_j^{(n)}(h_2, \ldots h_{n-1}) y^j$$

B) Jede Lösung $G(y,x)$ von (PDform, I) mit $G(1,x) = X$ ist eine Lösung von (Tform, I).

Bew $G(y,x) \in (\mathbb{C}[y])[\![x]\!]$ mit $G(1,x)$ Lösung von (PDform, I)

$$\left.\begin{array}{l} U(y,z,x) := G(yz,x) \\ V(y,z,x) := G(z, G(y,x)) \end{array}\right\} \in (\mathbb{C}[y,z])[\![x]\!]$$

genügen beide

$$\begin{cases} y\dfrac{\partial f}{\partial y}(y,z,x) = H(x)\dfrac{\partial}{\partial x} f(y,z,x) \\ f(1,z,x) = G(z,x) \end{cases}$$

Eindeutigkeitssatz für dieses System gilt

$\Rightarrow$ Beh B).

'Umordnung' in (PDform, I)

$$G(y,x) = yx + \sum_{n\geq 2} P_n(y)x^n \in (\mathbb{C}[y])[[x]]$$

sei Lösung von (PDform, I), $G(1,x) = 1$

$$\Rightarrow \quad G(y,x) = \sum_{n\geq 1} \phi_n(x) y^n \text{ mit } \phi_n(x) \in \mathbb{C}[[x]]$$

$\overset{A|B|}{\Rightarrow}$ $(\phi_n(x))_{n\geq 0}$ summierbare Familie,

$\sum \phi_n(x) \overset{!}{=} x$ sinnvoll. (NI)

$$\overset{(PDform, I)}{\Rightarrow} \quad n\,\phi_n(x) = H(x)\,\phi_n'(x), \quad n\geq 1$$

[Für jedes n ist dies äquivalent zu einer Briot-Bouquetschen Differentialgleichung (im nicht-generischen Fall; 'lösbar')]

$$H(x) = x(1 + h_2 x + \dots) = x\cdot H^*(x)$$

$$H^*(x) = 1 + h_1^* x + \dots \quad (h_1^* = h_2 \dots)$$

$$n\,\phi_n(x) = x\cdot H^*(x)\cdot\phi_n'(x) \Leftarrow$$

$$x\,\phi_n'(x) = n\,\phi_n(x)(1 + h_1^* x + \dots)^{-1}$$

$$\begin{cases} x\,\phi_n'(x) = n\,\phi_n(x) + n\sum_{\alpha+\beta\geq 2} d_{\alpha\beta}\, x^\alpha \phi_n(x)^\beta \\ \phi_n(0) = 0 \end{cases}$$

Die n-te Gleichung von (U) hat die Lösungsmenge $\{\phi_n(x) = \varphi_n^{(n)} \varphi_{1,0}(x)^n \mid \varphi_n^{(n)} \in \mathbb{C}\}$ wobei $\varphi_{1,0}(x)$ die Lösung der 1. Gleichung von U mit $\varphi_{1,0}(x) = 1 \cdot x + \ldots$ ist.

$S(x) = \varphi_{1,0}(x) = x + \ldots \in \Gamma_1$

$$\sum_{n \geq 1} \phi_n(x) = x \Rightarrow \sum_{n \geq 1} \varphi_n^{(n)} \varphi_{1,0}(x)^n = x$$

$$\Rightarrow \quad S^{-1}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^{(n)} x^n$$ (Bestimmung der $\varphi_n^{(n)}$) ..

c) Es sei $G(y,x)$ eine formale Iterationsgruppe vom Typ I. Dann gibt es genau ein $S \in \Gamma_1$ so dass

$$G(y,x) = S^{-1}(y\, S(x))$$ (Standardform)

In der Darstellung $G(y,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) y^n$ gilt $\phi_n(x) = \varphi_n^{(n)} S(x)^n$ $(n \geq 1)$ mit $\varphi_n^{(n)} \in \mathbb{C}$.

Ist $S \in \Gamma_1$, so ist $G(y,x) = S^{-1}(y\,S(x))$ Lösung von (T_{form}, I).

$(D\text{ form}, I)$

$$\begin{cases} y \dfrac{\partial G}{\partial y}(y,x) = H(G(y,x)) \\ G(1,x) = x \end{cases}$$

Analoge Ergebnisse zu A) und B)
"Umordnung" $G(z,x) = \sum \phi_n(x) z^n$

$(B_I) + (D\text{ form}, I) \Leftarrow$

$$n\,\phi_n(x) = \sum_{\nu=1}^{n} h_\nu \sum_{\substack{r_1+\dots+r_\nu = n \\ r_j \geq 1}} \left(\prod_{j=1}^{\nu} \phi_{r_j}(x)\right) \qquad n \geq 1$$

(eine Rekursion <u>ohne</u> Auftreten einer Differentiation!)
Die explizite Darstellung von ϕ_n ist analog zu C)

(AJ form I)

$$H(X) = X + h_2 X^2 + \ldots \in \mathbb{C}[\![X]\!]$$

$$\begin{cases} H(X) \cdot \frac{\partial}{\partial y} G(y,X) = H(G(y,X)) \\ G(y,X) = yX + \sum_{n \geq 2} P_n(y) X^n \end{cases}$$

Bedeutung der Aczél-Jabotinskyschen Differentialgleichungen

Charakterisierung der maximalen abelschen Untergruppen von Γ:

$\mathcal{F} \subset \Gamma$ ist eine maximale abelsche Untergruppe von $(\Gamma, \circ)$ $\Leftrightarrow$ $\exists\, H(X) \in \mathbb{C}[\![X]\!]$, $H \neq 0$ ord $H \geq 1$, so dass gilt

$$\phi \in \mathcal{F} \Leftrightarrow H(X)\,\phi'(X) = H(\phi(X))$$

$\mathcal{F}$ isomorph zu $\mathbb{C}^\times$
oder

$\mathcal{F}$ isomorph zu $\left(\left\{ \begin{pmatrix} \rho & t \\ 0 & \rho \end{pmatrix} \middle| \rho^m = 1, t \in \mathbb{C} \right\}, \cdot \right)$

(m durch $\mathcal{F}$ eindeutig bestimmt)

d) <u>Zusammenhang mit Briot-Bouquetschen Differentialgleichungen</u>

$H(X) = X \cdot H^*(X)$, $H^*(X) = 1 + h_2 X + \ldots + h_{\nu+1} X^\nu + \ldots$

(AJ form) $\Leftrightarrow$ $G(y, X) =: \Phi(x)$

$$X \Phi'(x) = (1 + h_2 X + \ldots)^{-1} H(\Phi(x))$$

$$\Leftrightarrow \quad X \Phi'(x) = 1 . \Phi(X) + \sum_{\substack{\alpha, \beta \\ \alpha+\beta \geq 2 \\ \beta \geq 1}} d_{\alpha\beta}(h) X^\alpha \Phi(X)^\beta \; (+ 0 \cdot X)$$

Briot-Bouquetsche Differentialgleichung

Bekannt: zu jedem $\tilde{P}_1(y) \in \mathbb{C}[y]$ gibt es genau eine Lösung

$$\tilde{G}(y, x) = \tilde{P}_1(y) X + \sum_{n \geq 2} \tilde{P}_n(y) X^n$$

mit Polynomen $\tilde{P}_n(y)$.

Speziell:

$\hat{\exists}$ Lösung $G(y,x)$ von (AY, form)

der Gestalt $G(y,x) = yx + \sum_{n\geq 2} P_n(y) x^n$

$\in (\mathbb{C}[y])[[x]]$ $\quad \deg_y P_n(y) = n$

genaue Struktur der Koeffizienten P_n

$$P_n(y) = \frac{h_n}{n-1}(y^n - y) + \sum_{j=2}^{n} \frac{\Theta_j^{(n)}(h_2,\dots,h_{n-1})}{n-1}(y^j - y)$$

$\Theta_j^{(n)}$, $2 \leq j \leq n$ Polynome, rekursiv

bestimmt durch

$$\sum_{\nu=2}^{n-1} h_\nu \left(\sum_{\substack{r_1+\dots+r_\nu = n \\ r_j \geq 1}} \left(\prod_{j=1}^{\nu} P_{r_j}(y)\right) - (n-\nu+1) P_{n-\nu+1}(y) \right)$$

$$= \sum_{j=2}^{n} \Theta_j^{(n)}(h_2,\dots,h_{n-1}) y^j$$

Dieses $G(y,x)$ ist Lösung von (AY, formal, E).

Umordnung

$$G(y,X) = \sum_{n \geq 1} \phi_n(X)\, y^n \in (\mathbb{C}[[X]])[[y]]$$

$$(\phi_n(X))_{n \geq 1} \qquad (\phi_n(X)\, y^n)_{n \geq 1}$$

summierbare Familien $\Rightarrow$

$$H(X)\,\phi_n'(X) = \phi_n(X) + \sum_{\nu=2}^{n} h_\nu \sum_{\substack{r_1+\dots+r_\nu = n \\ r_j \geq 1}} \left[\prod_{j=1}^{\nu} \phi_{r_j}(X)\right] \qquad n \geq 1$$

$$\phi_1(X) \in \Gamma_1 .$$

[Transformierbar in ein rekursives System von Briot-Bouquetschen Differentialgleichungen $\quad (H(X) = X(1+h_2X+\dots))$

$$X\,\phi_n'(X) = (1+h_2X+\dots)^{-1}\left[\phi_n(X)+\dots\right] \;]$$

Direkte (rekursive) Berechnung der $\phi_n(X)$: $\phi_n(X) = \varphi_n\,[\phi(X)]^n$, $n \geq 1$

$(\varphi_n)_{n \geq 1}$ rekursiv bestimmbar

$\rightsquigarrow$ Standardform

4. Bemerkungen zur Standardform

$(F_t)_{t\in\mathbb{C}}$ Iterationsgruppe vom Typ I $\Rightarrow$
$\exists\, S\in\Gamma_1$ so dass $F_t(x) = S^{-1}(c_1(t)S(x))$, $t\in\mathbb{C}$

(falls $F_t(x) = c_1(t)X + \dots$)

a) Normalform des Generators

$(F_t)_{t\in\mathbb{C}}$ Iterationsgruppe vom Typ I

$F_t(x) = c_1(t)X + \dots \quad , t\in\mathbb{C}$

$\Rightarrow F_t(x) = c_1(t)X + \sum_{n\geq 2} P_n(c_1(t))X^n \Rightarrow$

$G(y,x) = yX + \sum_{n\geq 2} P_n(y)X^n$, Lösung von (T form I)

$H(x) := \frac{\partial}{\partial y}G(y,x)\big|_{y=1} = X + h_2X^2 + \dots \in \mathbb{C}[[x]]$

$S\in\Gamma \Rightarrow \tilde{G}(y,x) := S^{-1}(G(y,S(x)))$ Lösung von (T form, I) mit Generator $\tilde{H}(x) = X + \dots$

$$\frac{\partial S}{\partial x}(x)\cdot\tilde{H}(x) = H(S(x))$$

(notw. und hinreichend für Äquivalenz)

$\Rightarrow \exists^1 S \in \Gamma_1$, so dass $\tilde{H}(X) = X$, d.h.

$$X \frac{\partial S}{\partial x}(x) = S(X) + h_2 S(X)^2 + \ldots$$

(spezielle Briot-Bouquetsche Differentialgleichung)

$$\Rightarrow \quad YX = S^{-1}(G(y, S(X)))$$

$$G(y, X) = S(y \cdot S^{-1}(X))$$

$$F_t(X) = S(G(t) S^{-1}(X)), \quad t \in \mathbb{C}$$

$$T = S^{-1} \quad F_t(X) = T^{-1}(G(t) S(X))$$

Standardform

f) $H(X) = X + h_2 X^2 + \ldots \quad \in \mathbb{C}[\![X]\!]$

$$H(X) \cdot \phi'(X) = H(\phi(X)), \quad \phi(X) = \rho X + \ldots, \rho \neq 0$$

Standardform für die Lösungsmenge dieser Aczél-Jabotinskyschen Gleichung

Rechnen in $\mathbb{C}\langle\langle X \rangle\rangle$, dem Ring der formalen Laurentreihen mit endlichem Hauptteil.

$$H(x) = X \cdot H^*(x) \quad , H^*(x) = 1 + h_2 X + \cdots$$

$$(H^*(x))^{-1} = 1 + h_1^* X + h_2^* X^2 + \cdots$$

$(Ay) \Rightarrow$

$$\frac{\phi'(x)}{\phi(x)} \left(1 + h_1^* \phi(x) + \cdots h_\nu^* \phi(x)^\nu + \cdots\right)$$
$$= \frac{1}{x} \left(1 + h_1^* X + \cdots\right)$$

$$\frac{\phi'(x)}{\phi(x)} - \cancel{\frac{1}{X}} = -\left(h_1^* \phi'(x) + \cdots + h_\nu^* \phi'(x) \phi(x)^{\nu-1} + \cdots\right)$$
$$+ \left(h_1^* + h_2^* X + \cdots h_\nu^* X^{\nu-1} + \cdots\right)$$

$$\left(\operatorname{Ln} \frac{\phi(x)}{\rho X}\right)' = -\left(h_1^* \phi(x) + \cdots + \frac{h_\nu^*}{\nu} \phi(x)^\nu + \cdots\right)'$$
$$+ \left(h_1^* \cancel{X}' + \cdots + \frac{h_\nu^*}{\nu} X^\nu + \cdots\right)'$$

$$\Rightarrow \operatorname{Ln} \frac{\phi(x)}{\rho X} = -T(\phi(x)) + T(x)$$
$$T(x) := h_1^* X + \frac{h_2^*}{2} X^2 + \cdots$$

exp: $$\frac{\phi(x)}{\rho X} = \frac{e^{T(x)}}{e^{T(\phi(x))}} \quad , \quad S(x) := X e^{T(x)} \in \Gamma_1$$

$$\Rightarrow \phi(x) e^{T(\phi(x))} = \rho X e^{T(x)}$$

$$S(\phi(X)) = \rho\, S(X) \Rightarrow$$
$$\phi(X) = S^{-1}(\rho\, S(X)).$$

Die Koeffizienten von S sind Polynome in den h_n.

c) Vertauschbare Potenzreihen, simultane Normalformen

Bem

Vor. $(U_i)_{i\in I} \subset \Gamma$, $U_i \circ U_j = U_j \circ U_i$, $\forall i,j \in I$

$U_i(X) = u_1^{(i)} X + \dots$. Es gebe unendlich viele verschiedene $u_1^{(i)}$

Bch $\exists\, S \in \Gamma$, so dass $U_i(X) = S^{-1}(u_i S(X)), \forall i \in I$.

1. Fall: $\exists\, i_0 \in I$, so dass u_{i_0} keine Einheitswurzel $\Rightarrow \exists\, S \in \Gamma$, so dass $U_{i_0}(X) = S^{-1}(u_{i_0} S(X))$, $(S \circ U_{i_0} \circ S^{-1})(X) = u_{i_0} X$. $(S \circ U_i \circ S^{-1})(X) \circ (u_{i_0} X) = (u_{i_0} X) \circ (S \circ U_i \circ S^{-1})(X)$, $i \in I \Rightarrow (S \circ U_i \circ S^{-1})(X) = u_i X$, $\forall i \in I$, $U_i(X) = S^{-1}(u_i S(X))$, $i \in I$.

2. Fall. Jedes u_i, $i \in I$ ist Einheitswurzel ($u_i \in E$) $\Rightarrow$ $\{ \mathrm{ord}(u_i) \mid i \in I \}$ unbeschränkte Teilmenge von $\mathbb{N}$

Semikanonische Formen

$V(X) = \sigma X + \ldots$, $\in \Gamma$, $\sigma \in E$, $N > 0$ minimal mit $\sigma^N = \sigma$ ($\mathrm{ord}(\sigma) = N-1$) $\Rightarrow$

$\exists$ $S \in \Gamma_1$, so dass

$$(S^{-1} \circ V \circ S)(X) = \sigma X + \tilde{v}_N X^N + \tilde{v}_{2(N-1)+1} X^{2(N-1)+1} + \ldots$$
$$\ldots + \tilde{v}_{\nu(N-1)+1} X^{\nu(N-1)+1}$$

$W \in \Gamma$, $W \circ V = V \circ W \Rightarrow$
$$(S^{-1} \circ W \circ S)(X) = \sigma X + \tilde{w}_N X^N + \ldots + \tilde{w}_{\nu(N-1)+1} X^{\nu(N-1)+1}$$

(Ausfegen)

$\Rightarrow$ $\exists$ $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $S_k \in \Gamma_1$, $(m_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $1 < m_1 < m_2 < \ldots$, so dass mit $T_k = S_k \circ S_{k-1} \circ \ldots \circ S_1$

$$(T_k^{-1} \circ U_i \circ T_k)(X) = u_i X + \ldots . X^{m_k} + \ldots$$
$(k \in \mathbb{N})$ $i \in I$

$$\lim_{k \to \infty} T_k = S \text{ existiert } (S \in \Gamma_1)$$

$k \to \infty$

$$(S^{-1} \circ U_i \circ S)(X) = u_i X \quad , \quad i \in I .$$

Es sei $(F_t)_{t \in \mathbb{C}}$ eine Iterationsgruppe vom Typ I. $F_t(X) = c_1(t)X + \dots \Rightarrow$

$\mathrm{Im}(c_1)$ unendlich; $F_t \circ F_s = F_s \circ F_t$, $s, t \in \mathbb{C}$ Bem.

(wegen der Translationsgleichung) $\Rightarrow$

$\exists\, S \in \Gamma_1$, so dass $F_t(X) = S^{-1}(c_1(t)S(X))$, $t \in \mathbb{C}$.

5. Formale Iterationsgruppen vom Typ II

$$G(y+z, X) = G(y, G(z, X))$$
in $(\mathbb{C}[y,z])[\![X]\!]$

$k \geq 2$ $\quad G(y,X) = X + yX^k + \sum_{n > k} P_n(y) X^k$

$$\in (\mathbb{C}[y])[\![X]\!]$$

$$G(0,X) = X$$

$$H(X) := \frac{\partial}{\partial y} G(y,X)\Big|_{y=0}, \quad H(X) = X^k + h_{k+1} X^{k+1} + \dots$$

Normalformen des Generators

$G(y,x)$ formale Iterationsgruppe vom Typ (II,k) mit Generator $H(x) = x^k + h_{k+1} x^{k+1} + \dots$,

$S \in \Gamma \Rightarrow$

$\tilde{G}(y,x) := S^{-1}(G(y, S(x)))$ formale Iterationsgruppe vom Typ (II,k) mit dem Generator

$$\tilde{H}(x) = [S'(x)]^{-1} H(S(x))$$

Bem $S \in \Gamma_1$ kann so bestimmt werden, dass

$$\tilde{H}((x) = x^k + h X^{2k-1}$$

Normalform; h Invariante gegenüber Γ_1

Normalformen und (PD form, I)

$$\frac{\partial}{\partial y} G(y,x) = H(x) \frac{\partial}{\partial x} G(y,X)$$

$$H(x) = X^k + h X^{2k-1} \quad ; \quad G(0,X) = X$$

$$\Rightarrow G(y,x) = x + yx^k + \sum_{n=2}^{+\infty} P_{n(k-1)+1}(y)\, x^{n(k-1)+1}$$

$$P_{n(k-1)+1}(y) = 1 \qquad , n=0$$

$$P_{n(k-1)+1}(y) = y \qquad , n=1$$

$$P_{n(k-1)+1}(y) = \left(\prod_{i=1}^{n-1}(i(k-1)+1)\right)\frac{y^n}{n} + h\,Q_n(y,h) \quad , n \geq 2$$

$Q_n(y,h)$ Polynom in y vom Grad $n-1$
Polynom in h vom Grad $[\frac{n}{2}]-1$

Rekursionsformeln für Q_n.

Entwicklung von $G(y\,x)$ nach dem Parameter h

$$G(y,x) = \sum_{r\geq 0} G_r(y,x)\,h^r \in (\mathbb{C}[x,y])[[h]]$$

$$\frac{\partial}{\partial y} G_r(y,x) = x^k \frac{\partial}{\partial x} G_r(y,x) + x^{2k-1} G_{r-1}(y,x) \qquad r \geq 1$$

$$\frac{\partial G_0}{\partial y}(y,x) = x^k \frac{\partial}{\partial x} G_0(y,x)$$

+ Randbedingungen

$\Rightarrow$

$$G_r(y,x) = \sum_{n \geq r} \sum_{\substack{(j_1 \cdots j_r) \\ 1 \leq j_1 \\ j_s \geq j_{s-1}+2,\ s \geq 2 \\ j_r \leq n+r-1}} \frac{\prod_{i=1}^{n+r-1} |i| \, x^{|n+r|}}{\prod_{s=1}^{r} |j_s| \; n!} \, y^n$$

$$|n+r| := (n+r)(k-1)+1$$

Diese Entwicklung ist auch sinnvoll für $k \in \mathbb{C}$.

(D. formal) liefert eine interessante kompakte Form der $G_r(y,x)$

$$G_r(y,x) = x^{|r|}\left(1-(k-1)yx^{k-1}\right)^{-\frac{|r|}{k-1}}$$

$$\cdot P_r\left(\ln\left(1-(k-1)yx^{k-1}\right)\right), \quad r \geq 0$$

$|r| = r(k-1)+1$

$\left(1-(k-1)yx^{k-1}\right)^{-\frac{|r|}{k-1}}$ Binomialreihe

$h=0 \quad G_0(y,x) = x\left(1-(k-1)yx^{k-1}\right)^{-\frac{1}{k-1}}$

spezielle Lösungen der Translationsgleichung, treten samt ihren Konjugierten beim Problem der reversiblen Potenzreihen auf (J. Haneczok)

Lie-Gröbner-Reihen

$$G(y,x) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} D^n(x)\, y^n$$

mit $D(f(x)) = H(x)\, f'(x)$

$$G(y,x) = \sum_{n \geq 0} \phi_n(x)\, y^n \quad \text{in (PDform II)}$$

$$\phi_{n+1}(x) = \frac{1}{n+1} H(x)\,\phi_n'(x) \quad , n \geq 0$$

$$\phi_0(x) = x \quad , \phi_n(0) = 0, \ n \geq 1$$

$$\Rightarrow \phi_n(x) = \frac{1}{n!} \sum_{i \in I_n} K(i) \prod_{j=0}^{n-1} \left[H^{(j)}(x)\right]^{i_j}$$

$K(i)$ rekursiv zu bestimmen ($\in \mathbb{N}$)

6. Abschließende Bemerkungen

A) Die Methode von W. Jabłoński - L. R
B) Aczél-Jabotinskysche Differentialgleichungen und implizite Funktionen
C) Aczél-Jabotinskysche Differentialgleichungen und Briot-Bouquetsche Differentialgleichungen

A) $(G,+)$ abelsche Gruppe

Gesucht:
Allgemeine Form der Homomorphismen

$$\theta : (G,+) \longrightarrow (\Gamma, \circ)$$

Detaillierte Untersuchung der Funktionalgleichungssysteme (FE, I) und (FE, II) in Verbindung mit der Konstruktion aller analytischen Iterationsgruppen

Hier im (einfachen) Spezialfall:

$$\theta(t)(X) = c_1(t)X + c_2(t)X^2 + \dots, \quad t \in G$$

$\operatorname{Im}(c_1)$ unendlich

$$c_1(s+t) = c_1(s)\,c_1(t)$$
$$c_n(s+t) = c_1(s)\,c_n(t) + c_n(s)\,c_1(t)^n + \sum_{k=2}^{n-1} f_k(s) \sum_{\bar{u}_n \in U_{n,k}} B_{\bar{u}_n} f_j(t)^{\mu_j}, \quad s,t \in \mathbb{C} \qquad \text{(FE, I)}$$

$B_{\bar{u}_n}$ sind z. B. aus der Formel von Faà di Bruno bekannt

$\Rightarrow$

$$f_n = (c_1^n - c_1)\left(p_n \sum_{k=0}^{n-2} c_1^{\,l} + \vartheta_n(c_1; p_2, \dots, p_{n-1})\right) \quad (n \geq 2) \quad (C)$$

$(\vartheta_n)_{n\geq 2}$ Folge von Polynomen.
$(p_n)_{n\geq 2}$ Folge von Parametern, die durch Einsetzen spezieller Werte von t und ev. geeignete Limiten berechnet werden.
$(p_n)_{n\geq 2}$ ergibt sich aus dem speziellen Θ
$(\vartheta_n)_{n\geq 2}$ erfüllen ein System polynomieller Relationen ($\mathrm{I}\!\mathrm{d}$) und Rekursionsformeln

Frage

Liefert (C) für jede Folge $(p_n)_{n\geq 2}$ komplexer Zahlen und jede multiplikative Funktion $c_1 : G \to \mathbb{C}^*$ eine Iterationsgruppe vom Typ I?

Ja

Analytische Iterationsgruppen vom Typ I

$$F_t(x) = c_1(t)\,x + \dots c_\nu(t)\,x^\nu + \dots$$

$c_\nu : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ganz $\quad (c_1(t) = e^{\lambda_1 t},\ t \in \mathbb{C},\ (\lambda_1 \neq 0))$

(i) $(F_t)_{t\in\mathbb{C}}$ analytische Iterationsgruppe,

$$H(x) = \frac{\partial F}{\partial t}(t,x)\Big|_{t=0} = \sum_{\nu\geq 1} c_\nu'(0)\,x^\nu$$

$$H(x) := \lambda_1 x + \sum_{k=2}^{\infty} ((k-1)\lambda_1 d_k)\,x^k \quad (\lambda_1 \neq 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial t}(t,x) = H(F(t,x)) \\ F(0,x) = x \end{cases} \qquad (D)$$

(ii) Gegeben $H(x) = \lambda_1 x + \sum_{k=2}^{\infty} ((k-1)\lambda_1 d_k)\,x^k \ (\lambda_1 \neq 0)$

Dann hat (D) genau Lösung $F_t(x) = c_1(t)\,x + \dots$ mit ganzen Koeffizienten c_ν. $(F_t)_{t\in\mathbb{C}}$ ist Iterationsgruppe vom Typ I, $\frac{\partial F}{\partial t}(t,x)\Big|_{t=0} = H(x)$

Integration von (D) . (D) $\Leftrightarrow$

$$c_1'(t) = \lambda_1 c_1(t) \quad , \quad c_1(0) = 1$$

$$c_n'(t) = \lambda_1 c_n(t) + (n-1)\lambda_1\lambda_n c_1(t)^n + \sum_{k=2}^{n-1} \left((k-1)\lambda_1\lambda_k\right) \sum_{\pi_n \in U_{n,k}} B_{\pi_n} \prod_{j=1}^{n-k-1} c_j(t)^{k_j}$$

$$c_n(0) = 0 \qquad , n \geq 2 .$$

$\Rightarrow \quad c_1(t) = e^{\lambda_1 t}$;

$\exists$ Folge universeller Polynome $(P_n \mid n \geq 2)$,

so dass

$$c_n(t) = e^{\lambda_1 t}\left(\lambda_n\left(e^{(n-1)\lambda_1 t} - 1\right) + P_n\left(e^{\lambda_1 t}; \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}\right)\right)$$

(C, analyt.)

$$\partial_X P_n(X, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \leq n-1$$

$(P_n)_{n \geq 2}$ kann rekursiv definiert werden

Für eine beliebige Folge $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ mit $\lambda_1 \neq 0$ liefert (C, analyt.) eine analytische Iterationsgruppe vom Typ I

Es sei $\left(\tilde{F}_t(x)\right)_{t\in\mathbb{C}}$ die analytische Iterationsgruppe zur gegebenen Folge $(\lambda_1, \lambda_2 \ldots)$, $\lambda_1 \neq 0$. Ihre Koeffizientenfunktionen c_ν haben eine Darstellung gemäß (C analyt) und eine gemäß (C). Vergleich: $\exists$ bijektive Beziehung $\mathcal{B}$ zwischen den Parametern $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ und den Parametern $(p_n)_{n\geq 2}$ (gemäß C). Es sei nun $(p_n)_{n\geq 2}$ beliebig gegeben. $(\lambda_n)_{n\geq 1} := \mathcal{B}^{-1}((p_n)_{n\geq 2}) \Rightarrow$ Die zu $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ gehörige analytische Iterationsgruppe hat gemäß (C) die Darstellung mit den Parametern $\mathcal{B}(\mathcal{B}^{-1}(p_n)) = (p_n)_{n\geq 2}$.

$e^{\lambda_1 t}$ durch (gemäß Id) beliebige verallgemeinerte Exponentialfunktion c_1 zu ersetzen.

B) Die Differentialgleichungen von Aczél-Jabotinsky und implizite Funktionen

$$H(x) = x^k + h\,x^{2k-1} \quad , k \geq 2$$

In $\mathbb{C}\langle\langle x \rangle\rangle$:

$$\frac{\phi'(x)}{\phi(x)^k}\left(1 + h\,\phi(x)^{k-1}\right)^{-1} = \frac{1}{x^k}\left(1 + h\,x^{k-1}\right)^{-1}$$

geom. Reihe

$$h\left(\frac{1}{x} - \frac{\phi'(x)}{\phi(x)}\right) = -\left(-\frac{1}{k-1}\phi(x)^{-(k-1)} + \frac{h^2}{k-1}\phi(x)^{2(k-1)} + \dots\right)'$$
$$+\left(-\frac{1}{k-1}x^{-(k-1)} + \frac{h^2}{k-1}x^{k-1} + \dots\right)'$$

$$\phi(x) = \rho x e^{\theta(x)} \,,\ \theta(0) = 0 \Rightarrow \rho^{k-1} = 1$$

$$-h\,\theta'(x) = -\left(-\frac{1}{k-1}\frac{1}{x^{k-1}}e^{-(k-1)\theta(x)} + \dots\right)'$$
$$+\left(-\frac{1}{k-1}\frac{1}{x^{k-1}} + \frac{h^2}{k-1}x^{k-1} + \dots\right)'$$

$$\Rightarrow -h\,\theta(x) + t\,x^{k-1} = -\left(-\frac{1}{k-1}e^{-(k-1)\theta(x)} + \dots\right)$$
$$+\left(-\frac{1}{k-1} + \frac{h^2}{k-1}x^{k-1}e^{(k-1)\theta(x)} + \dots\right)$$

t Integrationskonstante

$\Rightarrow$ unabhängig vom speziellen ρ

$$t\,X^{k-1} = \theta(x) + R(\theta(x), x^{k-1})$$

$$R(u,v) = \sum_{(k-1)\alpha+\beta\geq 2} d_{\alpha\beta}\, u^\alpha v^\beta$$

Für jedes $t \in \mathbb{C}$ ergibt sich $\theta(x) = \theta_t(x)$ als implizite Funktion

$$\theta(t,x) = t\,X^{k-1} + \sum_{\nu\geq 2} Q_{\nu(k-1)}(t)\, X^{\nu(k-1)}$$

$$t = 0 \Rightarrow \theta(x) = 0 \Rightarrow \phi(x) = \rho X \quad (\rho^{k-1} = 1)$$

C) Die Differentialgleichungen von Aczél-Jabotinsky und Briot-Bouquetsche Differentialgleichungen

$$H(x)\,\phi'(x) = H(\phi(x))$$

$$H(x) = x^k + h_{k+1}x^{k+1} + \cdots\cdots, \quad k \geq 2$$

$$\phi(x) = \rho\, x\, e^{\theta(x)}, \quad \theta(0)=0 \Rightarrow \rho^{k-1} = 1$$

Speziell $\rho = 1$ (Fall der Iterationsgruppen vom Typ (II, k))

$$\Rightarrow x\,\theta'(x) = (k-1)\theta(x) + \sum_{\substack{\alpha+\beta\geq 2\\ \beta\geq 1}} d_{\alpha\beta}\, x^\alpha\, \theta(x)^\beta \qquad (BB)$$

$d_{\alpha\beta}$ Polynome in $h_{k+1}, \ldots$

Lösung $\quad \theta_t(x) = t\,x^{k-1} + \sum_{\nu\geq k} \tilde{Q}_\nu(t)\, x^k$

$\tilde{Q}_\nu$ Polynom in t, $\partial \tilde{Q}_\nu \leq \left[\frac{\nu}{k-1}\right]$

$$\Rightarrow \phi_t(x) = x\,e^{\theta_t(x)} = x + t\,x^k + \sum_{\nu\geq k+1} Q_\nu(t)\,x^\nu \quad (t\in\mathbb{C})$$

Die Lösungen $\phi_\rho(x) = \rho\, x\, e^{\theta_\rho(x)}$ i.a. schwieriger zu konstruieren

Normalform des Generators

$$H(X) = X^k + h X^{2k-1} \quad , k \geq 2$$

$\theta_\rho(X)$ unabhängig von ρ

$$X\,\theta'(X) = (k-1)\theta(X) + \sum_{(k-1)\alpha+\beta\geq 2} d_{\alpha\beta}\,(h X^{k-1})^\alpha\,((k-1)\theta(X))^\beta \qquad (BB_1N)$$

Zu jedem $t \in \mathbb{C}$ gibt es genau eine Lösung

$$\theta_t(X) = t X^{k-1} + \sum_{\nu\neq k} \tilde{Q}_\nu(t) X^\nu$$

$\eta = e^{\frac{2\pi i}{k-1}} \Rightarrow \theta(\eta X)$ ebenfalls Lösung von (BB_1N)

$\theta(\eta X) = t X^{k-1} + \ldots \Rightarrow \theta(X) = \theta(\eta X) \Rightarrow \theta(X) \in \mathbb{C}[[X^{k-1}]]$

$$\theta(X) = t X^{k-1} + \sum_{\mu\geq 2} \tilde{Q}_{\mu(k-1)}(t)\, X^{\mu(k-1)},$$

$\tilde{Q}_{\mu(k-1)}$ Polynom, $\partial \tilde{Q}_{\mu(k-1)} = \mu \Rightarrow$

$$\phi_\rho(X) = \rho X \cdot e^{\theta(t,X)} = X + t X^k + \sum_{\nu\geq 2} Q_\nu(t)\, X^{\nu(k-1)+1}$$