Lineare Algebra II, Übungen, Sommersemester 2008
2. Übungsblatt, für den 12.3.2008

1. Der Grad des Nullpolynoms sei als $-\infty$ definiert. Für Polynome $f \neq 0$ wurde der Grad von f im 1. Übungsblatt eingeführt. Wir schreiben dafür $\text{Grad}(f)$. Beweisen Sie die Gradformeln für Polynome f und g.
$$\text{Grad}(f+g) \leq \max\{\text{Grad}(f), \text{Grad}(g)\}.$$
$$\text{Grad}(fg) = \text{Grad}(f) + \text{Grad}(g).$$
Wir verwenden dabei die Konvention $n + (-\infty) = (-\infty) + n = (-\infty) + (-\infty) = -\infty$ und $n > -\infty$ für alle ganzen Zahlen $n \geq 0$.

2. Für ein komplexes Polynom f zeigen Sie: $\alpha \in \mathbb{C}$ ist genau dann Nullstelle von f, wenn es ein Polynom g gibt, so dass $f(z) = (z - \alpha)g(z)$.
Hinweis: Schreiben Sie das Polynom $\tilde{f}(z) := f(z + \alpha)$ in der Form $\sum_{i=0}^{n} b_i z^i$ und bestimmen Sie den Wert von b_0. Leiten Sie nun aus $f(z) = \tilde{f}(z - \alpha)$ die gewünschte Darstellung von f her.

3. Beweisen Sie: Das reelle Polynom $z^2 + \alpha z + \beta$ kann genau dann als Produkt $(z - \lambda_1)(z - \lambda_2)$ mit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ geschrieben werden, wenn $\alpha^2 \geq 4\beta$ erfüllt ist.

4. Berechnen Sie das Produkt fg der komplexen Polynome f und g.
a) $f(z) = \sum_{i=0}^{3} a_i z^i, \quad g(z) = \sum_{i=0}^{2} b_i z^i.$
b) $f(z) = 1 + 2iz + 3z^2 + (4 + i)z^3, \quad g(z) = 1 + iz^2 + z^5$ mit $i^2 = -1$.
c) $f(z) = 1 - z^2, \quad g(z) = 1 + z^2 + z^4 + z^6.$

5. Bestimmen Sie Polynome q und r so dass $f(z) = g(z)q(z) + r(z)$ erfüllt ist, mit $r = 0$ oder Grad von r kleiner als Grad von g.
a) $f(z) = 6z^7 + 5z^6 + 16z^5 + 19z^4 + 19z^3 + 15z^2 + 7z + 3, \quad g(z) = z^4 + 2z^2 + z + 1$
b) $f(z) = -24z^5 - 12z^4 - 10z^3 + 15z - 9, \quad g(z) = 4z^2 + 2z - 1.$