Lineare Algebra II, Übungen, Sommersemester 2008
3. Übungsblatt, für den 2.4.2008

1. Sei T ein linearer Operator auf dem Vektorraum V. Beweisen sie:
   a) Sei r eine positive ganze Zahl, und $U_1, \ldots, U_r$ seien T-invariante Unterräume von V, dann ist $U_1 + \ldots + U_r$ ebenfalls T-invariant.
   b) Sei I eine beliebige Indexmenge. Für $i \in I$ seinen U_i Unterräume von V, die invariant unter T bleiben. Dann ist
   $$\bigcap_{i \in I} U_i$$
   ebenfalls T-invariant.

2. Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum und sei A ein linearer Operator auf V. Beweisen sie: Wenn A n paarweise verschiedene Eigenwerte besitzt, dann bilden die Eigenvektoren von A eine Basis von V.

3. Beweisen sie, oder geben sie ein Gegenbeispiel zu folgender Aussage: Falls U ein Unterraum von V ist, der unter jedem linearen Operator T invariant ist, dann ist $U = \{0\}$ oder $U = V$.

   Hinweis: Verwenden sie den Basisergänzungssatz. Falls ihnen der Beweis für beliebig dimensionales V zu schwer ist, dann führen sie ihn für $V = \mathbb{R}^3$ durch.

4. Sei T ein linearer Operator auf V, so dass jeder Vektor in V ein Eigenvektor von T ist. Beweisen sie, dass T ein skalares Vielfaches der Identität ist.

5. Sei T ein linearer Operator auf dem n-dimensionalen Vektorraum V, so dass jeder $(n-1)$-dimensionale Unterraum von V invariant unter T ist. Beweisen sie, dass T ein skalares Vielfaches der Identität ist.

   Hinweis: Verwenden sie Beispiel 1 und Beispiel 4.

6. Sei T der lineare Operator auf $\mathbb{R}^n$ gegeben durch
   $$T(x_1, \ldots, x_n) = (x_1 + \ldots + x_n, \ldots, x_1 + \ldots + x_n).$$
   Bestimmen sie alle 1-dimensionalen T-invarianten Unterräume von $\mathbb{R}^n$.