Lösung von Beispiel 5 des 11. Übungsblattes

Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist $e^x \neq 1$, daher gilt

$$\sigma_n(x) = \sum_{l=0}^{n} e^{lx} = \frac{(e^x)^{n+1} - 1}{e^x - 1} = \frac{e^{(n+1)x} - 1}{e^x - 1}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Für $x = 0$ ist $\sigma_n(0) = \sum_{l=0}^{n} 1 = n + 1$.

Sei $m \in \mathbb{N}$. Nach Konstruktion ist $f_m(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, denn für $x \neq 0$ ist der Zähler $e^{mx} - 1 \neq 0$ und für $x = 0$ ist

$$f_m(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m^{n+1}}{(n+1)!} 0^n = m.$$

Daher ist

$$\begin{aligned} \frac{f_{n+1}(x)}{f_1(x)} &= \begin{cases} \frac{e^{(n+1)x}-1}{e^x-1} & \text{falls } x \neq 0 \\ n+1 & \text{falls } x = 0 \end{cases} \\ &= \sigma_n(x). \end{aligned}$$

Die Exponentialreihe konvergiert absolut. Einerseits gilt:

$$\sigma_n(x) = \sum_{l=0}^{n} e^{lx} = \sum_{l=0}^{n} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{l^r x^r}{r!} = \sum_{r=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{n} l^r \right) \frac{x^r}{r!} = \sum_{r=0}^{\infty} S_n^{(r)} \frac{x^r}{r!}.$$

Andererseits ist für x hinreichend nahe bei 0

$$\begin{aligned} \sigma_n(x) = \frac{f_{n+1}(x)}{f_1(x)} &= \left(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{B_r}{r!} x^r \right) \left(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{m^{r+1}}{(r+1)!} x^r \right) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s+t=r} \frac{B_s}{s!} \frac{(n+1)^{t+1}}{(t+1)!} x^r \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{r} \frac{B_s}{s!} \frac{(n+1)^{r-s+1}}{(r-s+1)!} x^r. \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert

$$\frac{S_n^{(r)}}{r!} = \sum_{s=0}^{r} \frac{B_s}{s!} \frac{(n+1)^{r-s+1}}{(r-s+1)!},$$

woraus

$$\begin{aligned} S_n^{(r)} &= \sum_{s=0}^{r} \frac{r!}{s!(r-s+1)!} B_s (n+1)^{r-s+1} \\ &= \frac{1}{r+1} \sum_{s=0}^{r} \frac{(r+1)!}{s!(r+1-s)!} B_s (n+1)^{r+1-s} \\ &= \frac{1}{r+1} \sum_{s=0}^{r} \binom{r+1}{s} B_s (n+1)^{r+1-s} \end{aligned}$$

folgt.

Lösung von Beispiel 2 des 12. Übungsblattes

(a) Mittels Induktion nach n beweist man, dass $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ für $x \in [-1,1]$, $n \in \mathbb{N}_0$:

$\cos(0 \arccos x) = \cos 0 = 1 = T_0(x)$.

$\cos(1 \arccos x) = x = T_1(x)$.

Sei $n \geq 0$, dann gilt aufgrund der Additionstheoreme von Cosinus und Sinus, wegen $\sin^2 + \cos^2 = 1$, wegen $\cos(\arccos x) = x$ und nach Induktionsvoraussetzung:

$$\begin{aligned}
\cos\big((n+2)\arccos x\big) &= \cos\big((n+1)\arccos x + \arccos x\big) \\
&= \cos\big((n+1)\arccos x\big)\cos(\arccos x) - \sin\big((n+1)\arccos x\big)\sin(\arccos x) \\
&= \big(\cos(n\arccos x)\cos(\arccos x) - \sin(n\arccos x)\sin(\arccos x)\big)\cos(\arccos x) \\
&\quad - \big(\sin(n\arccos x)\cos(\arccos x) + \cos(n\arccos x)\sin(\arccos x)\big)\sin(\arccos x) \\
&= \cos(n\arccos x)(\cos(\arccos x))^2 - 2\sin(n\arccos x)\sin(\arccos x)\cos(\arccos x) \\
&\quad - \cos(n\arccos x)(\sin(\arccos x))^2 \\
&= \cos(n\arccos x)(\cos(\arccos x))^2 - 2\sin(n\arccos x)\sin(\arccos x)\cos(\arccos x) \\
&\quad - \cos(n\arccos x)\big(1 - (\cos(\arccos x))^2\big) \\
&= 2\big(\cos(n\arccos x)\cos(\arccos x) - \sin(n\arccos x)\sin(\arccos x)\big)\cos(\arccos x) \\
&\quad - \cos(n\arccos x) \\
&= 2\cos\big((n+1)\arccos x\big)x - \cos(n\arccos x) \\
&= 2T_{n+1}(x) - T_n(x).
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\cos(nx) &= \mathrm{Re}\big((\cos x + i\sin x)^n\big) \\
&= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} i^k \cos^{n-k}x \sin^k x\right) \\
&= \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ gerade}}}^{n}\binom{n}{k} i^k \cos^{n-k}x \sin^k x \\
&= \sum_{r=0}^{[n/2]}\binom{n}{2r}(-1)^r \cos^{n-2r}x \sin^{2r}x \\
&= \sum_{r=0}^{[n/2]}\binom{n}{2r}(-1)^r \cos^{n-2r}x (1-\cos^2 x)^r,
\end{aligned}$$

da

$$i^k = \begin{cases} i & \text{falls } k = 4s+1,\ s \in \mathbb{N}_0 \\ -1 & \text{falls } k = 4s+2 = 2(2s+1),\ s \in \mathbb{N}_0 \\ -i & \text{falls } k = 4s+3,\ s \in \mathbb{N}_0 \\ 1 & \text{falls } k = 4s = 2(2s),\ s \in \mathbb{N}_0. \end{cases}$$

Deshalb ist

$$\begin{aligned}
T_n(x) &= \cos(n\arccos x) \\
&= \sum_{r=0}^{[n/2]}\binom{n}{2r}(-1)^r \cos^{n-2r}(\arccos x)(1-\cos^2(\arccos x))^r \\
&= \sum_{r=0}^{[n/2]}\binom{n}{2r}(-1)^r x^{n-2r}(1-x^2)^r.
\end{aligned}$$