Übungen zur Analysis I, SS 08

1.Übungsblatt, auszuarbeiten bis 12.3.2008 bzw. 14.3.2008

---

1. $\varphi : A \to B$ sei eine Abbildung und $A', A'' \subset A$, $B', B'' \subset B$ seien Teilmengen. Zeigen Sie:

   (a) $\varphi(A' \cap A'') \subset \varphi(A') \cap \varphi(A'')$. Ist φ injektiv, so sind die beiden Mengen sogar gleich.
   Geben Sie ein Beispiel für Ungleichheit an!

   (b) $\varphi(A' \cup A'') = \varphi(A') \cup \varphi(A'')$.

   (c) $\varphi^{-1}(B' \cup B'') = \varphi^{-1}(B') \cup \varphi^{-1}(B'')$.

   (d) $\varphi^{-1}(B' \setminus B'') = \varphi^{-1}(B') \setminus \varphi^{-1}(B'')$.

2. Bestimme Sie für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^2 - 1$, und alle $y \in \mathbb{R}$ die Mengen $f^{-1}(\{y\})$.

3. (a) Zeigen Sie, daß für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $-1 < \frac{x}{1+|x|} < 1$.

   (b) Zeigen Sie, daß die Abbildung $\psi : \mathbb{R} \to (-1, 1)$, definiert durch $\psi(x) := \frac{x}{1+|x|}$, bijektiv ist, und bestimmen Sie die Umkehrfunktion ψ^{-1}.

4. Es seien a, b, c, d reelle Zahlen mit $bd \neq 0$. Zeigen Sie, daß $\frac{a}{b}\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ und daß $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+cb}{bd}$.

5. Zeigen Sie:

   (a) Es seien a, b reelle Zahlen mit $a < b$. Dann ist $a < \frac{a+b}{2} < b$.

   (b) Gilt für $a, b \in \mathbb{R}$, daß $a < b + \varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$, so ist $a \leq b$.

6. Zeigen Sie, daß für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

   (a) $x \leq |x|$, $|-x| = |x|$, $|x| \geq 0$.

   (b) Es sei zusätzlich $b \geq 0$. Dann sind die Aussagen $|x| \leq b$ und $-b \leq x \leq b$ gleichwertig.

Übungen zur Analysis I, SS 08

2.Übungsblatt, auszuarbeiten bis 2.4.2008 bzw. 4.4.2008

---

1. Zeigen Sie, daß für alle $m, n \in \mathbb{N}$ die Zahl mn ebenfalls in $\mathbb{N}$ liegt.

2. Es seien x, y reelle von 0 verschiedene Zahlen und es seien $m, n \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie:

   (a) $x^n y^n = (xy)^n$,

   (b) $(x^m)^n = x^{mn}$.

3. Es seien $n, k \in \mathbb{N}_0$, es gelte $0 \leq k \leq n-1$. Zeigen Sie:

   (a) $\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$,

   (b) $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.

4. (*schriftlich*) Zeigen Sie:

   (a) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ist $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$.

   (b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $x^n - y^n = (x-y)\left(\sum_{i=0}^{n-1} x^{n-1-i} y^i\right)$.

5. (a) Es sei $n \in \mathbb{N}$, es seien $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:
   $\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = x_n - x_0$ (*Teleskopsumme*).

   (b) Zeigen Sie, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:
   $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$.

6. Zeigen Sie:

   (a) Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$ und alle reellen Zahlen $a > 1$ gilt: $a^n > a$.

   (b) Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 3$ gilt: $2n + 1 < 2^n$.

   (c) Für alle $n \in \mathbb{N}_0 \setminus \{2, 3, 4\}$ gilt $n^2 < 2^n$.

   (d) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{j=1}^{n} j \cdot j! = (n+1)! - 1$.

Übungen zur Analysis I, SS 08

3.Übungsblatt, auszuarbeiten bis 9.4.2008 bzw. 11.4.2008

---

1. Es seien A und B nichtleere nach oben beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$. Zeigen Sie:

   (a) Wenn $A \subseteq B$, so ist $\sup A \leq \sup B$.

   (b) Wenn $r \geq 0$, ist rA nach oben beschränkt und es gilt $\sup(rA) = r \sup A$.

   (c) Wenn $r \leq 0$, ist rA nach unten beschränkt und es gilt $\inf(rA) = r \sup A$.

   (d) Sind $A, B \subseteq \mathbb{R}^+$, so ist AB nach oben beschränkt und es gilt $\sup(AB) = \sup A \cdot \sup B$.

2. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $I_n := (0, \frac{1}{n})$, $J_n := [0, 1 + \frac{1}{n}]$, $K_n := \{x \in \mathbb{R} \,\big|\, x > n\}$.

   (a) Zeigen Sie, daß $I_{n+1} \subseteq I_n$, $J_{n+1} \subseteq J_n$, $K_{n+1} \subseteq K_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

   (b) Bestimmen Sie $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} J_n$ und $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$.

3. Bestimmen Sie für folgende Mengen (falls möglich) das Supremum, das Infimum, das Maximum und das Minimum.
   $A := \left\{(-1)^n + \frac{1}{n} \,\Big|\, n \in \mathbb{N}\right\}$, $B := \left(1, \sqrt{2}\right]$, $C := B \cap \mathbb{Q}$, $D := \mathbb{N}$, $E := \left\{\frac{2n+1}{3n-1} \,\Big|\, n \in \mathbb{N}\right\}$.

4. (*schriftlich*) Es seien $a, b \in \mathbb{R}^+$, es seien n, m natürliche und r, s positive rationale Zahlen. Zeigen Sie:

   (a) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nm]{a}$.

   (b) Es ist $a < b$ genau dann, wenn $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.

   (c) $a^r a^s = a^{r+s}$, $(a^r)^s = a^{rs}$, $a^r b^r = (ab)^r$.

5. Zeigen Sie, daß zu jeder reellen Zahl x eine natürliche Zahl n existiert, so daß $x \leq 2^n$.

6. Zeigen Sie:

   (a) Für alle $a, b \geq 0$ ist $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

   (b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $a_1, a_2, \ldots, a_{2^n} \geq 0$ gilt $\sqrt[2^n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{2^n}} \leq \frac{a_1+a_2+\ldots+a_{2^n}}{2^n}$.

   (c) Für alle $m \in \mathbb{N}$ und alle $b_1, b_2, \ldots, b_m \geq 0$ ist $\sqrt[m]{b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_m} \leq \frac{b_1+b_2+\ldots+b_m}{m}$.
   (*Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel.*)
   Hinweis: Man wähle ein $n \in \mathbb{N}$ mit $m \leq 2^n$, setze $a_i = b_i$ für $1 \leq i \leq m$ und $a_i = \sqrt[m]{b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_m}$ für $m + 1 \leq i \leq 2^n$.

Übungen zur Analysis I, SS 08

4.Übungsblatt, auszuarbeiten bis 16.4.2008 bzw. 18.4.2008

---

1. Es sei $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \,\big|\, \operatorname{Im} z > 0\}$ und $\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z| < 1\}$. Die Abbildung $\Phi : \mathbb{C} \setminus \{-i\} \to \mathbb{C}$ sei gegeben durch $\Phi(z) := \frac{z-i}{z+i}$. Zeigen Sie, daß $\varphi := \Phi\big|_{\mathbb{H}}$ eine Bijektion zwischen $\mathbb{H}$ und $\mathbb{E}$ darstellt. Bestimmen Sie außerdem eine explizite Formel für φ^{-1}.

2. Die Funktion $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sei definiert durch $f((n,m)) := \binom{n+m-1}{2} + n$ (mit $\binom{1}{2} := 0$). Zeigen Sie, daß f eine (explizit gegebene) Bijektion zwischen $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und $\mathbb{N}$ darstellt.
   Hinweis: Man überlege, daß zu jeder natürlichen Zahl k genau eine natürliche Zahl l existiert, so daß $\binom{l}{2} < k \leq \binom{l+1}{2}$, und daß $\binom{l+1}{2} - \binom{l}{2} = l$.

   Welche anschauliche Idee steht hinter dieser Abzählung von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$?

3. Die unten angegebenen Folgen reeller Zahlen sind konvergent. Begründen Sie diese Aussage und bestimmen Sie in jedem Fall den Grenzwert.
   $\left(\dfrac{3n^{10} - 5n^5 + \frac{1}{n}}{\frac{1}{10}n^{11} + 3n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $\left(\sqrt[n]{an+b}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $a, b > 0$,
   $\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $\left(\dfrac{2 \cdot 3^{n+1} + n}{3^n + 2^{n+5}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Übungen zur Analysis I, SS 08

5.Übungsblatt, auszuarbeiten bis 23.4.2008 bzw. 25.4.2008

---

1. Es sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen. Zeigen Sie: Konvergiert die Folge $(z_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ für alle streng monoton steigenden Funktionen $\varphi\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ mit $\varphi(\mathbb{N}) \subsetneq \mathbb{N}$, so konvergiert die Folge selbst.

2. Es sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge komplexer Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} z_n = \alpha$, es sei $a\in\mathbb{C}$ und $\varepsilon > 0$. Zeigen Sie:

   (a) Die Folge der $|z_n|$ konvergiert (gegen $|\alpha|$).

   (b) Gilt $|z_n - a| \le \varepsilon$ für alle n, so folgt $|\alpha - a| \le \varepsilon$.

Zusatzaufgaben

Z1) Zeigen Sie: Die Zuordnung $\mathbb{C} \ni z \mapsto \frac{z}{1+|z|}$ bildet $\mathbb{C}$ bijektiv auf $\mathbb{E} := \{w \in \mathbb{C} \,\big|\, |w| < 1\}$ ab.

Z2) Gilt für $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n \in \mathbb{R}$, daß $a_j \le b_j$ für $1 \le j \le n$, so ist $\sum_{j=1}^n a_i \le \sum_{j=1}^n b_j$.

Z3) Beweisen Sie: Für alle $n \ge 2$ gilt

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} > 2(\sqrt{n+1} - 1).$$

Z4) Skizzieren Sie die Menge

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0 \text{ und } y < x < y+1 \text{ und } x+y \le 2\}$$

und bestimmen Sie das Supremum und Infimum der Menge

$$N := \{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in \mathbb{R} : (x,y) \in M\}.$$

Übungen zur Analysis I, SS 08

6.Übungsblatt, auszuarbeiten bis 7.5.2008 bzw. 9.5.2008

---

1. Es sei $a > 0$. Für $x > 0$ und $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, sei $g(x) := \frac{1}{k}\left((k-1)x + \frac{a}{x^{k-1}}\right)$. Zeigen Sie, daß $g(x) \geq \sqrt[k]{a}$. Zeigen Sie außerdem, daß für beliebiges $x_0 > 0$ die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n := g(x_{n-1})$ monoton fallend gegen $\sqrt[k]{a}$ konvergiert und daß für $n \geq 1$ immer $\frac{a}{x_n^{k-1}} \leq \sqrt[k]{a} \leq x_n$.

2. Berechnen Sie für $a = 2, 5, 10$ und $k = 2, 3, 10$ Intervalle $I_{k,a} = [u_{k,a}, v_{k,a}]$ mit $\sqrt[k]{a} \in I_{k,a}$ und $v_{k,a} - u_{k,a} < 10^{-4}$.

3. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $x_n := (n - 3[n/3]) + \frac{(-1)^n}{2n}$, wobei $[x] := \max\{n \in \mathbb{Z} \,|\, n \leq x\}$. Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, die Grenzwerte von Teilfolgen von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind, und Limes inferior und Limes superior dieser Folge.

4. Untersuchen Sie die Doppelfolge der $x_{nm} := \frac{(1-\frac{1}{n})^m}{1+(1-\frac{1}{n})^m}$ bezüglich der Existenz des iteriterten Zeilen- und Spaltenlimes und des Doppellimes.

5. Untersuchen Sie die Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$ und $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{-n}$ auf Konvergenz.

6. Es sei $\alpha > 0$. Zeigen Sie die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+\alpha)(k+1+\alpha)(k+2+\alpha)}$ und bestimmen Sie explizit den Wert dieser Summe.

Name .... Matr.Nr. ....

Gruppe Fripertinger/Mi. — Gruppe Schwaiger/Fr.

(*Bitte markieren Sie Ihre Lehrveranstaltungsgruppe durch Ankreuzen!*)

Übungen zur Analysis I, SS 08

1. Test, 30.4.2008

---

1. (*10 Punkte*) Skizzieren Sie die Menge $A := \{z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| < 1\}$ und untersuchen Sie die Menge $B := \{|z| \mid z \in A\}$ in Hinblick auf die Existenz von Maximum, Minimum, Supremum und Infimum. Beweisen Sie alle Ihre Behauptungen.

2. (*10 Punkte*) Die folgenden Folgen reeller Zahlen sind konvergent. Bestimmen Sie die Grenzwerte und begründen Sie Ihre Vorgangsweise.
   a) $\left(\dfrac{3n-5}{6n-3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ b) $\left(\dfrac{4n^3+3n^2-5n+\frac{1}{n}}{2n^3+1-\frac{1}{n^2}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ c) $\left(\dfrac{n^2+2^n-5}{2^n+\frac{n}{1{,}001^n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

3. (*10 Punkte*) Beweisen Sie, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4}\frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)}.$$

4. (*10 Punkte*) $\varphi\colon \mathbb{C}\setminus\{2\} \to \mathbb{C}$ sei definiert durch $\varphi(z) := \frac{z+i}{z-2}$. Beweisen Sie, daß φ injektiv ist, und bestimmen Sie (mit Beweis) $\varphi(\mathbb{C}\setminus\{2\})$.

Name .... Matr.Nr. ....

Gruppe Fripertinger/Mi. — Gruppe Schwaiger/Fr.

(*Bitte markieren Sie Ihre Lehrveranstaltungsgruppe durch Ankreuzen!*)

Übungen zur Analysis I, SS 08

1. Test, Nachtermin, 7.5.2008

---

1. (*10 Punkte*) Skizzieren Sie die Menge $C := \{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |\mathrm{Re}\, z| + 2\,|\mathrm{Im}\, z| < 1\}$ und untersuchen Sie die Menge $C' := \{|z| \,\big|\, z \in C\}$ in Hinblick auf die Existenz von Maximum, Minimum, Supremum und Infimum. Beweisen Sie alle Ihre Behauptungen.

2. (*10 Punkte*) Die folgenden Folgen reeller Zahlen sind konvergent. Bestimmen Sie die Grenzwerte und begründen Sie Ihre Vorgangsweise.
a) $\left(\dfrac{-3n-5}{7n+3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ b) $\left(\dfrac{-3n^3+6n^2-5n+\frac{2}{n}}{2n^3+2-\frac{1}{n^2}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ c) $\left(\dfrac{3^n+n2^n-5}{2\cdot 3^n+\frac{n^4}{0{,}5^n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

3. (*10 Punkte*) Beweisen Sie, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:
$$\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)=\frac{n+2}{2n+2}.$$

4. (*10 Punkte*) $\varphi\colon \mathbb{C}\setminus\{2\} \to \mathbb{C}$ sei definiert durch $\varphi(z) := \frac{iz+1}{z-2}$. Beweisen Sie, daß φ injektiv ist, und bestimmen Sie (mit Beweis) $\varphi(\mathbb{C}\setminus\{2\})$.

Übungen zur Analysis I, SS 08

7.Übungsblatt, auszuarbeiten bis 14.5.2008 bzw. 16.5.2008

---

1. Für beliebiges $\alpha \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ sei $\binom{\alpha}{n} := \frac{\prod_{j=0}^{n-1}(\alpha-j)}{n!}$. (Wenn $\alpha \in \mathbb{N}_0$ und $\alpha \geq n$ stimmt dieser Wert mit dem ursprünglich definierten überein.) Zeigen Sie, daß die Doppelreihe $\sum_{m,n=0}^{\infty} \binom{m}{n} 2^{n-2m}$ absolut konvergiert, und berechnen Sie ihre Summe.

2. Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen $a \in \mathbb{C}$ konvergierende Folge komplexer Zahlen und $p \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+p})$ und berechnen Sie ihre Summe.

3. (*schriftlich*) Es sei $V := \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, es sei $W := \{f \in V \,\big|\, f \text{ ist beschränkt } \}$ und $U := \{f \in V \,\big|\, f \text{ ist nach oben beschränkt } \}$. Zeigen Sie, daß V mit den aus der Vorlesung bekannten Verknüpfungen einen reellen Vektorraum bildet, und untersuchen Sie, ob W und/oder U Unterräume sind.

4. Die Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $g(x) := \begin{cases} x, & x \text{ rational} \\ 3x, & x \text{ irrational} \end{cases}$.
   Zeigen Sie, daß g bijektiv ist, aber weder monoton steigend noch monoton fallend.

Übungen zur Analysis I, SS 08

8.Übungsblatt, auszuarbeiten bis 21.5.2008 bzw. 23.5.2008

---

1. (a) Bestimmen Sie (mit Begründung) alle $a \in \mathbb{R}$, so daß die Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$g(x) := \begin{cases} x^3 + 2ax^2 + a^2, & \text{wenn } x \le 1 \\ ax^2 + \frac{4a^2}{1+x^2}, & \text{wenn } x > 1 \end{cases},$$ überall stetig ist.

   (b) Bestimmen Sie (mit Begründung) alle $x_0 \in \mathbb{R}$, in denen die Funktion $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\gamma(x) := \{x\} := x - [x]$ stetig ist.

2. Beweisen Sie (mit der Funktion γ aus dem vorigen Beispiel), daß die Funktion $\mathbb{R} \ni x \mapsto \sqrt{\gamma(x)} - \gamma(x) \in \mathbb{R}$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist.

3. Eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ heißt *gleichmäßig stetig*, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so daß für alle $x, y \in I$ gilt: Ist $|x - y| < \delta$, so ist $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

   (a) Zeigen Sie: Jede gleichmäßig stetige Funktion ist stetig.

   (b) Geben Sie ein Beispiel einer Funktion $f\colon (0,1] \to \mathbb{R}$, die stetig ist, aber nicht gleichmäßig stetig. Begründen Sie, daß Ihre Funktion f diese Eigenschaft hat.

4. Bezüglich des Begriffes der gleichmäßigen Stetigkeit sei auf das vorige Beispiel verwiesen:

   (a) Zeigen Sie, daß jede Lipschitzfunktion gleichmäßig stetig ist.

   (b) Zeigen Sie, daß $g\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) := \sqrt{x}$, gleichmäßig stetig und keine Lipschitzfunktion ist.

5. Beweisen Sie, daß die Funktion $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) := \frac{x}{1+x^2}$ eine Lipschitzfunktion ist.

Übungen zur Analysis I, SS 08

9.Übungsblatt, auszuarbeiten bis 28.5.2008 bzw. 30.5.2008

---

1. Die Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$) sei stetig. Es möge $f(a)f(b) < 0$ sein. Ferner sei $x_1 := a$, $y_1 := b$ und
$$(x_{n+1}, y_{n+1}) := \begin{cases} (x_n, \frac{x_n+y_n}{2}), & \text{wenn } f\left(\frac{x_n+y_n}{2}\right) f(a) \le 0 \\ (\frac{x_n+y_n}{2}, y_n), & \text{wenn } f\left(\frac{x_n+y_n}{2}\right) f(a) > 0 \end{cases}$$
für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, daß die Intervalle $[x_n, y_n]$ eine Intervallschachtelung bilden und daß für $\xi \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}}[x_n, y_n]$ gilt: $f(\xi) = 0$.

2. Bestimmen Sie (mit Beweis) alle stetigen Funktionen $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so daß $g \circ \gamma$ stetig ist, wobei γ die im ersten Beispiel des vorigen Blattes definierte Funktion ist.

3. Bestimmen Sie (mit Begründung) die Bildmenge der Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^3 + \frac{10}{1+x^2}$.

4. Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \sum_{n=0}^{\infty} (1+(-1)^n) n^3 z^n.$$

5. Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Ferner sei $0 < s < r < R$. Zeigen Sie:
   (a) Es existiert ein $M > 0$, so daß $|a_n r^n| \le M$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Mit diesem M gilt für alle $m \in \mathbb{N}$ und alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \le s$, daß
$$\left| \sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n \right| \le M \frac{\left(\frac{s}{r}\right)^m}{1 - \frac{s}{r}}.$$

Übungen zur Analysis I, SS 08

10.Übungsblatt, auszuarbeiten bis 4.6.2008 bzw. 6.6.2008

1. Für G mit $G(x) := 4x(1-x)$ ist nach Beispiel 2 des vorigen Blattes $G \circ \gamma =: g$ auf $\mathbb{R}$ stetig. Geben Sie (mit Begründung) an, für welche $n \in \mathbb{N}_0$ der Grenzwert $\lim_{x \to 0^+} x^n g(1/x)$ existiert.

2. (a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x) := \frac{x}{1+x^2}$. Zeigen Sie, daß f auf den Intervallen $(-\infty, -1]$ und $[1, \infty)$ streng monoton fällt und auf $[-1, 1]$ streng monoton steigt. Folgern Sie daraus, daß $f(-1) < f(x) < f(1)$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

   (b) Mit Hilfe von f definiert man die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{C}([0,1], \mathbb{R})$ durch $f_n(x) := f(\sqrt{n}x^n)$. Untersuchen Sie diese Folge auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz. Begründen Sie Ihre Ergebnisse.

3. Zeigen Sie, daß es höchstens eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt, so daß
   i) $f(x+y) = f(x)f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und so daß
   ii) ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $f(x) \geq 1 + x$ für alle $x \in [-\varepsilon, \varepsilon]$.
   Hinweis: Überlegen Sie zunächst, daß aus den Voraussetzungen folgt, daß

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq f(x) \leq \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n},$$

   wenn $n \in \mathbb{N}$ hinreichend groß ist.

4. (a) Zeigen Sie, daß die Exponentialfunktion E, $E(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, die Eigenschaften i) und ii) einer Funktion f aus dem vorigen Beispiel besitzt, und folgern Sie daraus, daß für alle $x \in \mathbb{R}$ die Folge der $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ konvergiert und daß $E(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

   (b) Bestimmen Sie (mit Begründung) alle reellen x mit $E(x) \geq 1 + x$.

5. Es sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Zeigen Sie, daß die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} z^k$ einen Konvergenzradius R' besitzt mit $R' \geq R$. Beweisen sie mit Hilfe dieses Resultats, daß die Funktion f, $f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, auf jedem Kreis $\overline{\mathrm{K}}(0, \delta)$ mit $0 < \delta < R$ eine Lipschitz-Funktion ist.

Übungen zur Analysis I, SS 08

11.Übungsblatt, auszuarbeiten bis 11.6.2008 bzw. 13.6.2008

1. (*Näherungsweise Berechnung der natürlichen Logarithmen*) Es sei $a > 0$ und es sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(x) := x - 1 + ae^{-x}$. Zeigen Sie:

   (a) $g(\mathbb{R}) \subseteq [\ln(a), \infty)$,

   (b) $g(x) \leq x$, wenn $x \geq \ln(a)$.

   (c) Für beliebiges $x_0 \in \mathbb{R}$ konvergiert die durch $x_{n+1} := g(x_n)$ definierte Folge gegen $\ln(a)$.

   (d) $|x - \ln(a)| = x - \ln(a) \leq e^x a^{-1} - 1$, wenn $x \geq \ln(a)$.

2. Entwickeln Sie auf Basis des vorigen Beispiels einen Algorithmus, der zu gegebenem $\varepsilon > 0$ und gegebenem $a > 0$ eine Zahl ξ berechnet, so daß $0 \leq \xi - \ln(a) < \varepsilon$. Testen Sie Ihr Verfahren für $\varepsilon = 10^{-5}$ und $a \in \{2, 10\}$.

3. Die Fibonacci-Zahlen sind durch $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ und die Rekursion $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, $n \geq 2$, definiert. Nach bekannten Sätzen gibt es eine Potenzreihe $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n x^n$ mit positivem Konvergenzradius r und ein $0 < s \leq r$, so daß $g(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$ für alle $|x| < s$.

   (a) Zeigen Sie: $g_n = f_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

   (b) Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $x^{n+1}(1+x)^n = \sum_{l=0}^{\infty} a_{nl} x^l$. Zeigen Sie, daß für geeignetes $t > 0$ und alle $|x| < t$ die Doppelreihe $\sum_n \sum_l a_{nl} x^l$ absolut konvergiert.

   (c) Finden Sie mit Hilfe des vorigen Punktes (oder mit anderen Mitteln) eine explizite Formel für die Zahlen f_n.

4. Es sei $\sum_n a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R. Zeigen Sie
$$\sup\{r \geq 0 \,\Big|\, (a_n r^n)_n \text{ ist beschränkt } \} = R = \sup\{r \geq 0 \,\Big|\, (a_n r^n)_n \text{ ist Nullfolge } \}.$$

5. Für $m \in \mathbb{N}$ sei $f_m(x) := (e^{mx} - 1)/x$, wenn $x \neq 0$, und $f_m(0) := 1$. Dann ist $f_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m^{n+1}}{(n+1)!} x^n$ für alle x (egal, ob $\neq 0$ oder $= 0$). Da $f_m(0) = 1 \neq 0$, existiert insbesondere eine Potenzreihe $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n$ mit positivem Konvergenzradius, so daß $f_1(x)g(x) = 1$ für alle x hinreichend nahe bei Null. Durch Koeffizientenvergleich kann man diese (Bernoullischen) Zahlen rekursiv berechnen: $B_0 = 1$, $\sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i} B_i = 0$, wenn $n \geq 1$. Für $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}_0$ sei $S_n^{(p)} := \sum_{l=0}^{n} l^p$. Ferner sei $\sigma_n(x) := \sum_{l=0}^{n} e^{lx}$.
Zeigen Sie, daß $\sigma_n(x) = \frac{e^{(n+1)x}-1}{e^x-1}$ für alle $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$, und daß für alle $|x| < \delta$, δ geeignet gewählt, $\sigma_n(x) = f_{n+1}(x)/f_1(x)$.
Leiten Sie daraus die (in ähnlicher Form von Jakob Bernoulli gefundene) Formel für die *Potenzsummen* $S_n^{(p)}$
$$S_n^{(p)} = \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^{p} \binom{p+1}{k} B_k (n+1)^{p+1-k}$$
her.

Übungen zur Analysis I, SS 08

12.Übungsblatt, auszuarbeiten bis 18.6.2008 bzw. 20.6.2008

---

1. (a) Drücken Sie $\cos 2x$ und $\sin 2x$ durch $\cos x$ und $\sin x$ aus.

   (b) Berechnen Sie explizite Werte für $\cos\alpha$ und $\sin\alpha$, wenn $\alpha \in \{0, \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2\}$.

   (c) Zeigen Sie, daß für $\xi := \cos(\frac{2\pi}{5})$ und $\eta := \cos(\frac{\pi}{5})$ die Beziehungen $\xi = 2\eta^2 - 1$ und $\eta := -2\xi^2 + 1$ gelten. Berechnen Sie damit $\cos\alpha$ und $\sin\alpha$ für $\alpha \in \{\frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}\}$.

2. (a) Es sei $T_0(x) := 1$, $T_1(x) := x$ und $T_{n+2}(x) := 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, daß für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $x \in [-1,1]$ gilt: $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$.

   (b) Verwenden Sie die Eulersche Formel $(\cos x + i \sin x)^n = \cos(nx) + i \sin(nx)$ zur Bestimmung einer Formel für $\cos(nx)$ bzw. $T_n(x)$, die nur von $\cos x$ bzw. x abhängt.

Name .... Matr.Nr. ....

Gruppe Fripertinger/Mi. — Gruppe Schwaiger/Fr.

(*Bitte markieren Sie Ihre Lehrveranstaltungsgruppe durch Ankreuzen!*)

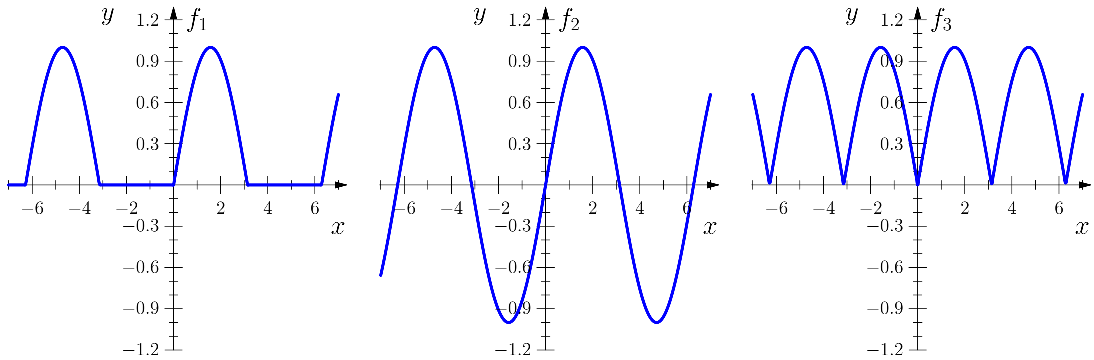
Übungen zur Analysis I, SS 08

2. Test, 27.6.2008

---

1. Die Funktionen $f_n, g_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ seien definiert durch $f_n(x) := \dfrac{\sqrt[4]{n}x^n}{1+nx^{2n}}$ und $g_n(x) := \dfrac{\sqrt[4]{n^3}x^n}{1+nx^{2n}}$. Zeigen Sie:
   (a) Die Folge der f_n konvergiert gleichmäßig gegen die Nullfunktion.
   (b) Die Folge der g_n konvergiert punktweise gegen die Nullfunktion.
   (c) $\lim_{n\to\infty} \sup_{0\le x\le 1} |g_n(x)| = \infty$.

2. Die Funktionen $f_1, f_2, f_3 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ haben die folgenden Graphen:



   (a) Welche dieser Funktionen beschreibt die Zuordnung
   $x \mapsto \frac{1}{2}\left(\sin(x) + \sqrt{1-\cos^2(x)}\right)$?
   (b) Welche Funktionen werden durch die beiden restlichen Graphen dargestellt?

3. (a) Bestimmen Sie die Konvergenzradien der Potenzreihen

$$\text{i) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} z^n, \quad \text{ii) } \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} z^n, \quad \text{iii) } \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1000}{n} z^{3n},$$
$$\text{iv) } \sum_{n=1}^{\infty} 3^n \left[1 - \left\{\frac{\ln n}{\ln 2}\right\}\right] z^n.$$

   (b) Bestimme, für welche $n \in \mathbb{N}$ der Grenzwert $a(n) := \lim_{m\to\infty} \left(1 - \{\frac{\ln n}{\ln 2}\}\right)^m$ von 0 verschieden ist.

   (Dabei ist für $x \in \mathbb{R}$ die Zahl $[x]$ die größte ganze Zahl $\le x$ und $\{x\} := x - [x]$.
   Hinweis zu (a) iv) und (b): Wann ist $\frac{\ln n}{\ln 2}$ in $\mathbb{N}_0$?)

4. Bestimmen Sie für $x_0 = 0$ zu jedem $\varepsilon > 0$ explizit ein $\delta > 0$, so daß für die Funktion $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^3 - 2x + 1$, gilt:
   Für alle $x \in \mathbb{R}$ folgt aus $|x - x_0| < \delta$, daß $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Name .... Matr.Nr. ....

Gruppe Fripertinger/Mi. — Gruppe Schwaiger/Fr.

(*Bitte markieren Sie Ihre Lehrveranstaltungsgruppe durch Ankreuzen!*)

Übungen zur Analysis I, SS 08

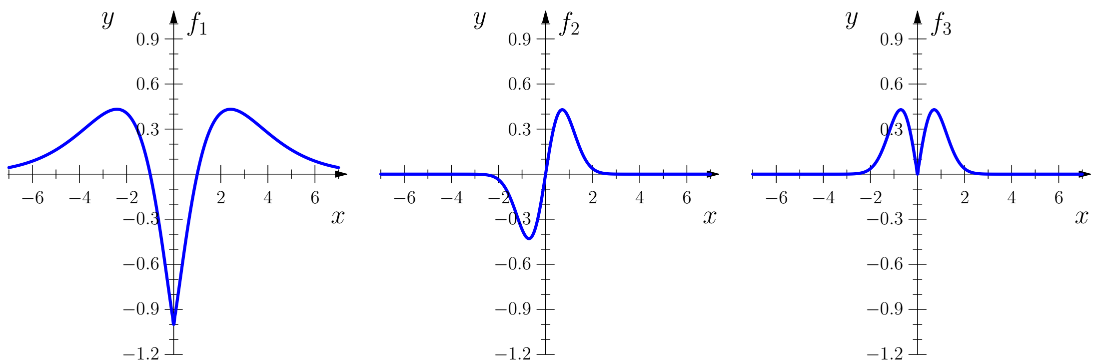
2. Test, Nachtragstermin, 9.10.2008

---

1. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x) := xe^{-x^2}$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ durch $f_n(x) := f(nx)$ definiert. Zeigen Sie, daß die folge der f_n auf $[0,1]$ punktweise, aber nicht gleichmäßig gegen die Nullfunktion konvergiert.
   Hinweis: Beachten sie das Grenzwertverhalten von $\frac{y^k}{e^y}$ für $y \to \infty$ und untersuchen Sie $f_n(1/n)$.

2. Bestimmen Sie für $x_0 = 1$ zu jedem $\varepsilon > 0$ explizit ein $\delta > 0$, so daß für die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := 2x^3 - 5x + 2$, gilt:
   Für alle $x \in \mathbb{R}$ folgt aus $|x - x_0| < \delta$, daß $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

3. Die Funktionen $f_1, f_2, f_3\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ haben die folgenden Graphen:



   Ordnen Sie diese Graphen den folgenden Funktionsdefinitionen zu:
   i) $x \mapsto f(x) := |x|\, e^{-x^2}$, ii) $x \mapsto g(x) := (x^2 - 1)e^{-|x|}$, iii) $x \mapsto h(x) := xe^{-x^2}$.
   Geben Sie stichhältige Argumente für Ihre Wahl.

4. Bestimmen Sie die Konvergenzradien der Potenzreihen

$$\text{i) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^n} z^n, \quad \text{ii) } \sum_{n=0}^{\infty} (1 - (-1)^n) 5^{2n} z^n,$$

$$\text{iii) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n, \text{ wobei } a_n := \prod_{k=0}^{n-1} \left(\tfrac{3}{2} - k\right).$$
